

Trabajo Fin de Grado

Estudio y simulación de flujos turbulentos
bidimensionales con aplicación a canales abiertos
con regiones de separación de flujo

Autor

Carlos Cebollada Gimeno

Director

Dr. Javier Murillo Castarlenas

Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos
Ingeniería mecánica
Escuela de Ingeniería y Arquitectura (EINA)
2017/2018



**Universidad
Zaragoza**

Trabajo Fin de Grado con título

Estudio y simulación de flujos turbulentos bidimensionales con aplicación a canales abiertos con regiones de separación de flujo

presentado para la obtención del título en

Grado en ingeniería mecánica

Realizado por

Carlos Cebollada Gimeno

y dirigido por

Dr. Javier Antonio Murillo Castarlenas

como director

Área de Mecánica de Fluidos

Departamento de Ciencia de Materiales y Fluidos

Escuela de Ingeniería y Arquitectura. Septiembre, 2018. Zaragoza



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

D./D^a. _____,

con nº de DNI _____ en aplicación de lo dispuesto en el art.

14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster)
_____, (Título del Trabajo)

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, _____

Fdo: _____

Estudio y simulación de flujos turbulentos bidimensionales con aplicación a canales abiertos con regiones de separación de flujo

RESUMEN

Este trabajo de fin de grado se enmarca dentro del campo de la mecánica de fluidos computacional, más concretamente, en la simulación de flujos turbulentos de aguas poco profundas y lámina libre. Este tipo de flujos están presentes en numerosas situaciones de la naturaleza, como en ríos, costas o estuarios y su completo entendimiento puede ser de gran impacto tanto para la ciencia como para la ingeniería. En este trabajo se analizarán dichos flujos utilizando herramientas computacionales con base física, basadas en leyes fundamentales de conservación para las variables físicas de estudio.

Las tareas aquí realizadas forman parte de un proyecto de investigación del Grupo de Hidráulica Computacional (GHC) de la Universidad de Zaragoza, cuyo objetivo es el desarrollo de un código propio de simulación para la predicción y control de fenómenos en flujos complejos.

Se utilizará el modelo de ecuaciones de aguas poco profundas para representar los flujos de interés. En la derivación de dichas ecuaciones es necesario realizar distintas hipótesis, entre ellas, las necesarias para modelar la turbulencia. Para ello, se introduce la aproximación de Boussinesq, que modeliza los términos de las ecuaciones Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) correspondientes a los esfuerzos turbulentos, que son desconocidos. Será necesario modelizar un nuevo parámetro introducido con la aproximación de Boussinesq, denominado como viscosidad turbulenta, para lo cual se utilizarán expresiones algebraicas.

El código de simulación de partida para este trabajo no estaba provisto de las herramientas necesarias para considerar los efectos de la turbulencia. Uno de los objetivos principales es derivar, implementar y validar un método numérico para la discretización de los términos turbulentos, que pueda ser incorporado al código original. Para la validación, se realizan análisis de convergencia y sensibilidad para tres casos analíticos y dos experimentales con el fin verificar el método propuesto.

Parte de este trabajo fin de grado también se centra en el tratamiento de datos experimentales que puedan ser usados para la validación del modelo propuesto. El tratamiento de datos es especialmente exhaustivo para uno de los casos experimentales, consistente en un canal en forma de T, ya que los datos encontrados en la bibliografía no se han postprocesado. Además, dado que los modelos utilizados consideran el flujo promediado en la vertical, es necesario calcular promedios verticales de velocidad de los datos experimentales. Para ello, se usan programas como MATLAB, Excel, Notepad++ y un software de reconocimiento de caracteres. Con estos datos se obtienen perfiles de velocidades horizontales y verticales, campos de velocidades en 3D y 2D, distribuciones de calados, desviaciones típicas de velocidades promediadas en la vertical y regresiones lineales que relacionan distintas variables del problema.

AGRADECIMIENTOS

Dedico estas líneas para agradecer el trato desinteresado que he recibido por parte de todas las personas del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza, ya fuese con el fin de aclarar cuestiones técnicas, de recomendar bibliografía o de realizar sugerencias y críticas constructivas. Este trato y todas estas aportaciones han ayudado a mejorar este trabajo de un modo u otro, además de hacerme sentir como uno más.

En particular, estoy muy agradecido por el apoyo recibido por parte de Adrián Navas, con quien he descubierto los procedimientos y la realidad que suponen todo trabajo de investigación. Este día a día era totalmente desconocido para mí antes de comenzar este trabajo de fin de grado, lo que significa una evolución a nivel tanto personal como académico. A él, muchas gracias por su disposición, conocimientos, paciencia y por el trato impecable recibido.

Mencionar también de forma especial a Javier Murillo, director de este trabajo de fin de grado. Su disponibilidad para resolver dudas y aportar nuevas ideas de hacer las cosas han impulsado la realización de este trabajo de manera satisfactoria.

Expresar mi gratitud de igual forma a Pilar García, catedrática del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza, por su amabilidad, disponibilidad y recomendaciones bibliográficas.

Agradecimientos no menos importantes al Grupo de Hidráulica Computacional por la beca recibida estos meses a lo largo de la realización de este trabajo de investigación.

Quiero también mostrar mi gratitud de forma paralela por su paciencia y apoyo durante este tiempo a todas aquellas personas que forman parte de mi círculo de amistades.

En Zaragoza, a 26 de agosto de 2018

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelos matemáticos para flujos turbulentos de lámina libre	5
2.1. Ecuaciones de aguas poco profundas: aproximación RANS	5
2.2. Aproximación de Boussinesq de los términos turbulentos	6
2.3. Modelos paramétricos para la viscosidad turbulenta	6
2.3.1. Modelo de viscosidad de remolino constante	7
2.3.2. Modelo parabólico promediado en la vertical	7
2.3.3. Modelo de longitud de mezcla promediado en la vertical	7
3. Discretización numérica de las ecuaciones	9
3.1. Métodos de volúmenes finitos de alto orden	9
3.2. Discretización de los términos difusivos	11
4. Análisis de datos experimentales de flujos turbulentos	15
4.1. Canal recto con expansión	15
4.2. Canal en T	16
5. Validación del esquema numérico y análisis de resultados	19
5.1. Test 1: Análisis de convergencia de la aproximación de las derivadas	19
5.2. Test 2: Análisis de convergencia de la ecuación de convección-difusión	21
5.3. Test 3: Análisis de convergencia para un flujo viscoso con solución analítica	25
5.4. Test 4: Simulación de un canal recto con expansión	28
5.5. Test 5: Simulación de un canal en T	33
6. Conclusiones	39
Apéndices	41
A. Shallow water flows	43
A.1. Introduction to shallow water flows and turbulence	43
A.2. Shallow Water Equations	45
B. Numerical method to solve the SWE	51
B.1. Finite volume method: Godunov's method	51
B.2. The Riemann problem	53
B.3. Discretization of source terms	54
B.3.1. Bed slope	54
B.3.2. Friction	55
B.4. Example of discretization of the convection-diffusion equation	55

C. Numerical experiments and sensitivity analysis	59
C.1. Convergence analysis	59
C.2. Analytical case	66
C.3. Experimental validation 1: sudden expanded flume	70
C.4. Experimental validation 2: T-branching channel	93
D. T-branching channel data treatment and analysis	103
D.1. Description of the case	103
D.2. Measurements and data	104
D.2.1. Measurement techniques	104
D.2.2. Provided data	105
D.2.3. Data treatment	105
D.3. Hypotheses to complete velocity profiles	107
D.3.1. Derivation of the hypotheses	107
D.3.2. Comparison test for completed velocity profiles	109
D.4. Analysis of the experimental results	111
E. T-branching channel digitized data and Matlab scripts	113
E.1. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,149$	114
E.1.1. Velocity profiles	115
E.2. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,308$	119
E.2.1. Velocity profiles	120
E.3. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,409$	124
E.3.1. Velocity profiles	125
E.4. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,672$	132
E.4.1. Velocity profiles	133
E.5. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,838$	137
E.5.1. Velocity profiles	138
E.6. Script 1. Experimental velocity and water height	142
E.7. Script 2. Average velocity, standard deviation and .eps files	142
E.8. Script 3. A matter of organization	145
Bibliografía	148
Lista de figuras	152
Lista de tablas	160

Capítulo 1

Introducción

Un flujo se considera de aguas poco profundas cuando la dimensión del calado es mucho menor que las dimensiones horizontales que confinan al fluido, lo que posibilita considerar al mismo como cuasi-bidimensional. Este tipo de flujo está presente en numerosas situaciones de la naturaleza, como en ríos, costas o estuarios. Los flujos atmosféricos también pueden incluirse en esta categoría debido a las escalas geométricas de los mismos. Dada la abundancia de este tipo de flujos geofísicos y su interés tanto científico como tecnológico, es conveniente un estudio de los mismos con el fin de desarrollar modelos matemáticos que puedan reproducir con precisión los fenómenos inherentes a ellos. Esto permite alcanzar un mayor entendimiento de la mecánica de fluidos y proporcionar las herramientas necesarias para prever los efectos de fenómenos naturales como tsunamis, desbordamientos de ríos y fenómenos meteorológicos, así como para diseñar y optimizar procesos en los que este tipo de flujos participen.

La dificultad en el estudio de este tipo de flujos radica en que es frecuente la aparición de fenómenos turbulentos en ellos. Esto se debe a que el orden de magnitud de las fuerzas inerciales suele ser mayor al de las fuerzas viscosas, lo que resulta en un alto número de Reynolds (Re), asociado a flujos turbulentos. Una de las primeras personas que estudiaron la turbulencia fue Leonardo da Vinci, como muestra en su Codex Atlanticus del siglo XVI. Fueron necesarios numerosos desarrollos y esfuerzos de muchos investigadores hasta llegar a la formulación actual, descrita separadamente por Stokes y Reynolds, que proporcionaron formas de medir el grado de organización de un flujo [6, 9]. Resulta complejo dar una definición de la turbulencia en una frase, no obstante hay ciertas características inherentes a ella que se pueden enumerar. (I) Produce movimientos irregulares y aleatorios [10]. (II) Lleva a cabo una homogeneización de las características del fluido, como temperatura o concentración, debido a la mezcla rápida de las partículas en él. (III) Va acompañada de un alto número de Reynolds (Re), que da una idea del grado de organización del fluido en movimiento. (IV) Aparecen vórtices de diferentes escalas, mantenidos por un mecanismo tridimensional [2, 12]. (V) Disipa energía en forma de calor debido al trabajo de deformación de los esfuerzos cortantes con el confinamiento y con el propio fluido [1, 2, 4].

Es especialmente interesante la forma en la que los vórtices pueden interactuar entre ellos, alterando los movimientos de otros más pequeños e incluso absorbiéndolos [26], lo que se denomina cascada energética inversa. Esto también ocurre a gran escala con ciclones en La Tierra o en Júpiter [14]. Este último, por sus características como planeta, presenta gran cantidad de vórtices en su superficie, como se puede ver en la Figura 1.1.

Los flujos de aguas poco profundas resultan de interés en cuestiones medioambientales y de transporte de solutos y sedimentos. Su movimiento está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, no obstante, sólo se conocen soluciones analíticas de estas ecuaciones para casos muy concretos. Esto motiva la necesidad de usar métodos matemáticos para obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones en lugar de intentar resolverlas analíticamente.

Con el desarrollo de las capacidades de cómputo en las últimas décadas, que muestra la Ley de Moore, se posibilita la simulación de flujos como disciplina ampliamente reconocida, lo que se denomina mecánica de fluidos computacional, o en inglés, Computational Fluid Dynamics (CFD). El uso de métodos numéricos apoyados por la tecnología de hoy día, ofrece diversas aproximaciones a la resolución de un problema, lo que implicará distintas formas de considerar la turbulencia. La más precisa es resolver

las ecuaciones de Navier-Stokes numéricamente en mallas computacionales muy refinadas y con pasos temporales muy pequeños. Este enfoque de resolución se denomina Direct Numerical Simulation (DNS). No obstante, este método resulta inviable en aplicaciones de interés ingenieril hoy en día o en un futuro cercano debido al alto coste computacional que conlleva [25]. Otro enfoque consiste en resolver solamente las escalas grandes de un problema y modelizar las escalas más pequeñas (escalas disipativas), denominado Large Eddy Simulation (LES). Sin embargo, el método de resolución más común para problemas geofísicos, que implican grandes dominios de cálculo y largas escalas temporales, es el de las Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS).



Figura 1.1: Imágen de la superficie de Júpiter, obtenida de la galería web de la sonda Juno de la NASA.

En las RANS se realiza una descomposición de los términos de las ecuaciones de Navier-Stokes en promedios y fluctuaciones temporales. Es necesario modelizar y calibrar los términos desconocidos que aparecen como consecuencia de dicha descomposición, denominados esfuerzos turbulentos o de Reynolds, en lo que se denomina problema de cierre [11]. Es el enfoque que mejor equilibrio aporta, teniendo en cuenta precisión y tiempo de computación. Este es el método que permite derivar las ecuaciones de aguas poco profundas, o en inglés Shallow Water Equations (SWE), con los términos turbulentos modelados, y por tanto, es el método aquí usado.

Este trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de investigación del Grupo de Hidráulica Computacional (GHC) de la Universidad de Zaragoza que tiene como objetivo desarrollar un código propio con fines más ambiciosos que la simple simulación directa, como es la investigación en técnicas de optimización y control para la resolución de problemas inversos. Esto puede ser de aplicación, por ejemplo, en el diseño de actuaciones óptimas para la restauración de riberas [3]. El punto de partida de este trabajo es un código previamente desarrollado en el GHC para la simulación de las SWE, que utiliza una tecnología numérica de elevada precisión para el cómputo de los flujos [37, 7, 8]. Esta se basa en el uso de métodos avanzados de muy alto orden, denominados esquemas WENO-ADER, desarrollados en el marco del método de los volúmenes finitos. Dichos métodos utilizan reconstrucciones polinómicas de orden arbitrario en el espacio y en el tiempo y permiten obtener soluciones aproximadas con una mayor eficiencia en el cálculo, es decir, una mayor precisión con un menor coste computacional.

Además, el uso de métodos numéricos de alto orden también está motivado porque proporciona mucho menor error, posibilitando la observación de estructuras más detalladas. Un ejemplo de esto se presenta en la Figura 1.2, en la cual se comparan resultados de orden 1 y orden 3 para la concentración de un soluto en un flujo al pasar por un obstáculo cuadrado. Se observan estructuras más complejas, como el desprendimiento de vórtices, al usar un esquema numérico de orden 3, así como una menor difusión numérica.

El principal aporte de este trabajo es el estudio, implementación y validación de modelos de turbulencia que puedan ser incorporados al código de simulación existente con la finalidad de incrementar las capacidades y el campo de aplicación del mismo al incluir fenómenos físicos que si no, quedarían ignorados. A continuación, se detallan los objetivos del trabajo.

En primer lugar, es necesario realizar una búsqueda y estudio bibliográfico sobre la modelización de los esfuerzos turbulentos en modelos de aguas poco profundas, que aparecen como resultado de la descomposición temporal de Reynolds. Estos modelos son la aproximación de Boussinesq y una simplificación de esta, que permite expresar los esfuerzos turbulentos en forma de operador laplaciano sobre el vector velocidad. Posteriormente, se revisa la bibliografía existente sobre modelos para la viscosidad de remo-

lino, también llamada eddy viscosity, introducida con la aproximación de Boussinesq. En este trabajo se considerarán solamente aquellos modelos de tipo algebraico, desarrollados en el marco de la aproximación RANS. Estos modelos, también denominados de cero ecuaciones, son adecuados para el tipo de flujos que aquí se analizan [17, 32, 34, 38].

Además, se realiza la formulación matemática para la resolución numérica de los términos turbulentos. Para ello, se utilizarán fórmulas tradicionales de aproximación numérica de las derivadas espaciales, con error de truncamiento de orden 2. Al combinar esto con un alto orden de convergencia en el flujo, se proporcionará una precisión suficiente para el estudio de los fenómenos de interés en este trabajo. Esta discretización se implementa en el código original y se valida realizando un análisis de convergencia.

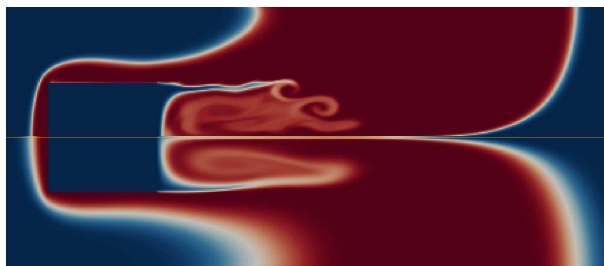


Figura 1.2: Imagen comparativa de los resultados del transporte de un soluto al pasar por un obstáculo sólido con forma de cuadrado. En la parte de arriba se usa un esquema numérico de orden 3 y en la de abajo de orden 1. Se observa menor difusión numérica en la simulación de alto orden, así como estructuras más complejas.

Se proponen adicionalmente otros casos test como son la resolución de dos problemas con solución analítica y la resolución de dos casos experimentales encontrados en referencias bibliográficas. Para estudiar la resolución de los casos reales y llevar a cabo un análisis de sensibilidad, es necesario realizar un tratamiento de los datos experimentales existentes para poder realizar comparaciones sistemáticas, pudiendo evaluar así el funcionamiento del código de simulación.

Dado que la comparación de resultados puede llevar una gran cantidad de tiempo si se realiza de forma manual, se generan varios códigos específicos para automatizar el proceso y calibrar los modelos de turbulencia de una forma más eficiente. Se realiza un estudio exhaustivo y se extraen conclusiones sobre los resultados numéricos y gráficos que se obtienen de estos códigos de comparación.

El software que se utiliza en este trabajo es variado, abarcando programas de edición de código fuente, preparación de documentos, cálculo numérico y análisis y visualización de datos. Los programas son: Notepad++, ParaView, MATLAB, LaTeX y Microsoft Excel. También se usa software de reconocimiento de caracteres (OCR). El lenguaje de programación en el que el código de simulación y las herramientas aportadas están escritas es Fortran.

La estructura del trabajo se muestra a continuación.

En el capítulo 2 se detalla el modelo de aguas poco profundas utilizado en este trabajo, que se basa en la aproximación RANS. Después, se presenta la aproximación de Boussinesq, que modela los esfuerzos turbulentos que aparecen al usar las RANS. Esta aproximación introduce un nuevo parámetro, la viscosidad de remolino. Dado que es necesario modelizar esta viscosidad, se explican los tres modelos algebraicos que se usan en este trabajo.

En el capítulo 3 se expone el método numérico y se propone una discretización de las derivadas existentes en la aproximación de Boussinesq. También se incluye una derivación del orden de error de esta discretización y un análisis de convergencia para comprobar la implementación en el código original.

En el capítulo 4 se muestran detalles de dos casos experimentales con regiones de separación de flujo disponibles en la bibliografía, consistentes en una expansión repentina y un canal en forma de T. Dado que los datos experimentales se comparan con resultados de las simulaciones, se realiza un análisis de los datos experimentales disponibles, realizando en el caso del canal en forma de T un trato de datos exhaustivo y obteniendo numerosos resultados presentados en los apéndices.

En el capítulo 5 se valida el código mediante cinco test. En primer lugar se muestra en detalle el

análisis de convergencia de la discretización propuesta para las derivadas espaciales que aparecen al usar la aproximación de Boussinesq. Posteriormente se presentan dos problemas con solución analítica a partir de las ecuaciones de aguas poco profundas y se simulan, verificando la convergencia del método con el refinamiento de malla y con el aumento del orden del esquema numérico. Por último, se simulan también los dos casos experimentales, de los cuales se ha realizado un análisis de sensibilidad con el fin de calibrar el código. Se muestran numerosas figuras comparativas sobre el proceso de calibración, tanto en este capítulo como en los apéndices. Al analizar los resultados de este trabajo hay que tener en cuenta que las ecuaciones que modelan los flujos de aguas poco profundas incluyen hipótesis y simplificaciones en su derivación. Esto, sumado a la disipación inherente a los métodos numéricos hace que la precisión de los resultados dependa del problema y sea incierta [25].

En el capítulo 6 se enumeran las conclusiones y el trabajo futuro.

En el final del documento se ha incluido una sección de apéndices en los que se incluye un desarrollo más extenso de los capítulos del trabajo, así como numerosas figuras resultado del análisis de sensibilidad y que están correctamente referenciadas en el texto principal del documento. Finalmente, se presenta la bibliografía y los índices de tablas y figuras.

Capítulo 2

Modelos matemáticos para flujos turbulentos de lámina libre

En este capítulo se explica brevemente el modelo matemático elegido para describir los flujos turbulentos de lámina libre, así como distintos modelos algebraicos con los que se parametrizan los fenómenos turbulentos de pequeña escala que no resuelven las ecuaciones del flujo. Estos modelos algebraicos, o de cero ecuaciones, modelizan la viscosidad de remolino introducida al usar la aproximación de Boussinesq. Adicionalmente se deriva una simplificación de la aproximación de Boussinesq que disminuye el coste computacional al no considerar derivadas cruzadas.

2.1. Ecuaciones de aguas poco profundas: aproximación RANS

Las SWE son un sistema hiperbólico de ecuaciones en derivadas parciales que describen problemas de superficie libre. La derivación de dichas ecuaciones se presenta en el Apéndice A. Esta derivación comienza con las ecuaciones de Navier-Stokes. Seguidamente se realiza una descomposición temporal de Reynolds y se modelizan los esfuerzos de Reynolds. Posteriormente, realizando ciertas simplificaciones, se obtienen las SWE 3D. Después, las ecuaciones son promediadas en la dirección vertical para obtener la versión bidimensional de las SWE, compuesta por la ecuación de conservación de masa y momento en x e y

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_z + \mathbf{S}_f + \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y . \quad (2.1)$$

A la izquierda de la igualdad, el primer vector contiene las variables conservadas, es decir, calado, h , y caudales unitarios en x e y , hu y hv . Las variables u y v son las velocidades promediadas en la vertical. El segundo y tercer término a la izquierda de la igualdad representan el gradiente espacial de los flujos físicos de masa y momento, que producen cambios de las variables debido al movimiento del fluido. A la derecha de la igualdad aparecen los términos fuente y de difusión. El primero de ellos, es el término fuente del fondo

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{pmatrix} , \quad (2.2)$$

donde z_b es la altura del fondo respecto de un nivel de referencia fijo. El segundo término fuente es el de fricción, de forma general

$$\mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{w,x}}{\rho} - \frac{\tau_{b,x}}{\rho} \\ -\frac{\tau_{w,y}}{\rho} - \frac{\tau_{b,y}}{\rho} \end{pmatrix} , \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad, $\frac{\tau_{w,x}}{\rho}$ es la velocidad de fricción al cuadrado u_*^2 y $\frac{\tau_{b,i}}{\rho} = c_f u_i |\mathbf{u}|$, siendo $c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}$

el coeficiente de fricción, n el coeficiente de Gauckler-Manning y g la aceleración debida a la gravedad. En la Sección A.2 se introducen dos coeficientes de Manning que indican el grado de rozamiento con el fondo, n_b y con las paredes, n_w , utilizando la ley de fricción compuesta de Horton-Einstein. Los dos últimos términos de la Ecuación (2.1) representan la difusión turbulenta

$$\mathbf{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xx} \\ hT_{yx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_y = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xy} \\ hT_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

siendo T_{ij} los esfuerzos turbulentos, los cuales serán modelizados mediante la aproximación de Boussinesq o una simplificación de ésta, que se explica en la siguiente sección.

2.2. Aproximación de Boussinesq de los términos turbulentos

Al tener en cuenta la fluctuación de las variables con el tiempo en las ecuaciones de Navier-Stokes mediante la descomposición de Reynolds, aparecen los esfuerzos turbulentos (ver Apéndice A.2). Estos esfuerzos representan de manera promediada los fenómenos turbulentos de pequeña escala que no se resuelven de manera directa. En este trabajo, se modelizan siguiendo la aproximación de Boussinesq, por tanto, los esfuerzos turbulentos de la expresión (2.4) quedan como

$$T_{xx} = 2\nu_e \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.6)$$

$$T_{yy} = 2\nu_e \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.7)$$

donde $\nu_e = \nu + \nu_t$ es la viscosidad de remolino, ν es la viscosidad cinemática del fluido y ν_t es la viscosidad turbulenta. Como se ha mencionado anteriormente, es necesario modelizar esta última. Distintas opciones se presentan en la sección 2.3.

Adicionalmente, se puede conseguir otra expresión simplificada de la aproximación de Boussinesq. Si consideramos $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y$ como un solo vector, se tiene en notación indicial

$$\mathbf{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right), \quad (2.8)$$

y en el Apéndice A se presenta la derivación a seguir para simplificar (2.8) en

$$\mathbf{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right), \quad (2.9)$$

que es la forma más común que se encuentra en la literatura [32]. De forma complementaria, se ha hecho una comparación cualitativa de ambas expresiones en uno de los casos simulados en el Apéndice C. Se observa que los resultados varían muy poco en casos en los que el calado sufre pequeñas variaciones.

2.3. Modelos paramétricos para la viscosidad turbulenta

Al obtener las RANS y modelizar los esfuerzos turbulentos con la aproximación de Boussinesq, aparece la denominada viscosidad turbulenta ν_t , para la cual hay que dar una expresión. Tres modelos algebraicos, también llamados de cero ecuaciones, se presentan en esta sección.

2.3.1. Modelo de viscosidad de remolino constante

Este es el modelo más simple de los aquí presentados. En él, la expresión $\nu_e = \nu + \nu_t$ es considerada como

$$\nu_e = \mathcal{C} , \quad (2.10)$$

donde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^+$ es un valor constante que se puede variar a elección. Este modelo puede ser útil en situaciones en las que la viscosidad de remolino tenga pocas variaciones en todo el dominio, ya sea debido a la geometría o a las condiciones del flujo.

2.3.2. Modelo parabólico promediado en la vertical

Este modelo tiene en cuenta la producción de turbulencia por el esfuerzo cortante con el fondo. Por tanto, permite modelar el carácter tridimensional de la turbulencia con un modelo bidimensional. Calcula ν_t como

$$\nu_t = \lambda U_* h , \quad (2.11)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es un valor empírico estimado como $\kappa/6$ y $U_* = \sqrt{c_f (u^2 + v^2)}$. Sin embargo, λ se usa como parámetro de calibración para controlar la producción turbulenta debida al rozamiento con el fondo [29].

2.3.3. Modelo de longitud de mezcla promediado en la vertical

El modelo parabólico no tiene en cuenta los gradientes de velocidad horizontales. Para incluir el efecto de estos gradientes horizontales en la viscosidad turbulenta se utiliza el modelo de longitud de mezcla [28]. Este modelo calcula ν_t como

$$\nu_t = \sqrt{(\nu_t^\nu)^2 + (\nu_t^h)^2} , \quad (2.12)$$

donde ν_t^ν es la componente vertical de ν_t

$$\nu_t^\nu = \lambda U_* h , \quad (2.13)$$

y ν_t^h es la componente horizontal dada por

$$\nu_t^h = l_s^2 \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} , \quad (2.14)$$

siendo $l_s = \min(\kappa c_m h \sqrt{\beta}, y_w \kappa)$ el coeficiente de longitud de mezcla. El término c_m es un coeficiente empírico, teóricamente $4/15\kappa$ [28], y_w es la distancia a la pared o contorno sólido más cercano al punto de estudio y $\beta \in \mathbb{R}^+$ es una constante de que podemos variar. Estos últimos dos términos son parámetros de calibración. Mientras β controla la intensidad de la turbulencia horizontal, y_w puede ser modificada por un parámetro corrector para controlar la cantidad de producción turbulenta cerca de las paredes.

Capítulo 3

Discretización numérica de las ecuaciones

En este capítulo se presenta sucintamente el método numérico usado para resolver el sistema de ecuaciones en (2.1). Una forma habitual de calcular resultados numéricos para leyes de conservación hiperbólicas, como las SWE, consiste en discretizar el dominio computacional en celdas donde se pueden integrar las ecuaciones originales, transformándolas en un sistema algebraico. Este sistema representa el balance discreto de las cantidades en cada celda. Al final del proceso se obtienen valores promedio en cada celda, aproximando la solución del sistema original. Este método de obtener resultados numéricos aproximados se denomina método de los volúmenes finitos [30]. También se muestra uno de los objetivos principales de este trabajo de fin de grado, que es la derivación de la discretización de las derivadas que se incluyen en los términos de difusión turbulenta. Mostrando adicionalmente de forma analítica y con simulaciones el orden del error de truncamiento.

3.1. Métodos de volúmenes finitos de alto orden

El problema de valor inicial y de frontera que se tiene a partir de la expresión (2.1) es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDPs: } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \\ \text{CI: } \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathring{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{CC: } \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_{\partial\Omega}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

con $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}^+$. El dominio espacial se discretiza en $N_x \times N_y$ celdas en el dominio, defino como $\Omega_{ij} \subseteq \Omega$. Las celdas se definen como

$$\Omega_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y, \quad (3.2)$$

y su área como

$$\vartheta_{ij} = (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot (y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y. \quad (3.3)$$

Para mallas estructuradas, $y = \frac{\Delta x}{2}$, siendo Δx la anchura de celda. Una malla computacional se dice estructurada si todas las celdas tienen la misma forma y tamaño (ver Figura 3.1). Si la malla estructurada está formada por celdas cuadradas, entonces se dice malla cartesiana, en la que se tiene $\vartheta_{ij} = \Delta x^2$.

Respecto a la discretización temporal, el paso de tiempo se calcula dinámicamente. Dicho paso temporal debe satisfacer la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) [30] dada para una malla cartesiana

como

$$CFL + Pe \leq 0,5 , \quad (3.4)$$

siendo $CFL = \left| \frac{u \Delta t}{\Delta x} \right|$ y $Pe = \left| \frac{2\nu_e \Delta t}{\Delta x^2} \right|$, donde u es la velocidad de propagación de la onda más rápida en el dominio. Se ha impuesto una condición de $CFL + Pe = 0,4$ para las simulaciones llevadas a cabo en este trabajo.

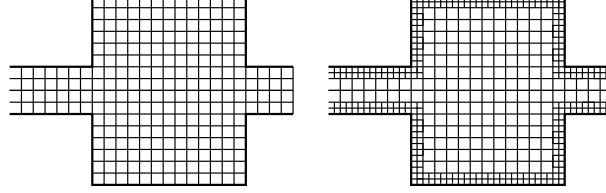


Figura 3.1: Izquierda: Ejemplo de una malla estructurada en la que cada celda tiene la misma forma y tamaño. Derecha: Ejemplo de malla no estructurada en la que el tamaño de celda ha sido refinado cerca de las paredes. Esto se realiza normalmente para imponer la condición de no deslizamiento en las paredes, haciendo así un cambio más suave de las velocidades.

Siguiendo el método de los volúmenes finitos, la integración de las ecuaciones y variables en las celdas de cálculo da lugar a la siguiente fórmula de actualización para una malla cartesiana

$$\mathbf{U}_{ij}^{n+1} = \mathbf{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^- - \mathbf{F}_{i-1/2}^+ + \mathbf{G}_{j+1/2}^- - \mathbf{G}_{j-1/2}^+ - \bar{\mathbf{S}}_{ij} - \bar{\mathbf{D}}_{ij} \right) , \quad (3.5)$$

lo que se denomina esquema de Godunov [30], donde \mathbf{F}^- , \mathbf{G}^- representan los flujos numéricos salientes y \mathbf{F}^+ , \mathbf{G}^+ los entrantes a la celda Ω_{ij} en las direcciones x e y (ver Figura 3.2), los superíndices n and $n+1$ se refieren al instante temporal actual y siguiente respectivamente, los subíndices indican las paredes de la celda Ω_{ij} y

$$\bar{\mathbf{S}}_{ij} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} \int_{y_{i+1/2}}^{y_{i-1/2}} \mathbf{S} \, dy \, dx \, dt , \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{ij} \approx \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \mathbf{D}_{ij} \, dy \, dx , \quad (3.7)$$

son aproximaciones de la integral de términos fuentes y difusivos respectivamente.

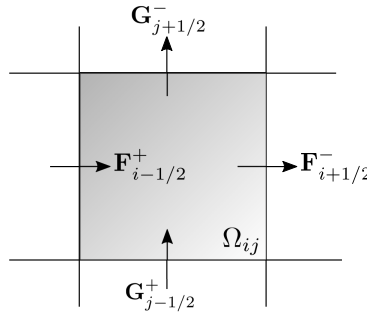


Figura 3.2: Representación de los flujos entrantes y salientes a la celda Ω_{ij} .

En este trabajo se han usado esquemas numéricos de primer y tercer orden. Los flujos se calculan resolviendo el problema de Riemann, explicado en el Apéndice B, en las paredes de las celdas al calcular las soluciones en el esquema numérico de primer orden. En el caso del esquema de tercer orden (ver Figura 3.3) los flujos en la pared derecha, por ejemplo, de la celda Ω_{ij} se calculan como

$$\mathbf{F}_{i+1/2} \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{p=1}^k w_p \mathbf{F}_{i+1/2,p} , \quad (3.8)$$

donde w_p son pesos Gaussianos en el intervalo $[-1, 1]$ en $p = 1, \dots, k$ puntos de cuadratura a lo largo de la pared de una celda y k es el número de puntos de cuadratura a lo largo de la pared.

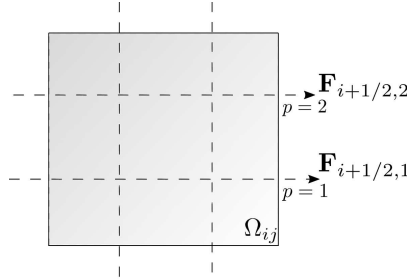


Figura 3.3: Representación de los flujos salientes en la pared derecha de la celda Ω_{ij} al usar un esquema numérico de tercer orden.

$\mathbf{F}_{i+1/2,p}$ son los flujos numéricos en cada punto de cuadratura, calculados mediante la resolución del Problema de Riemann Derivativo (DRP) [33].

3.2. Discretización de los términos difusivos

En este capítulo se detalla la discretización de las derivadas en la expresión (2.4) que aparecen al modelizar los esfuerzos turbulentos mediante la aproximación de Boussinesq y que contribuyen al efecto difusivo que se busca al querer reproducir la turbulencia en simulaciones.

Se considera la siguiente discretización de los vectores de difusión turbulenta

$$\overline{D}_{ij_{k,g}} \approx \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} D_{ij_{k,g}} dy dx \quad (3.9)$$

como la aproximación del promedio espacial de la componente g del vector de difusión turbulenta k , con $g = 2, 3$ (la primera componente del vector de difusión turbulenta es cero) y $k = x, y$. Los subíndices ij indican la celda de estudio Ω_{ij} y, por claridad, serán omitidos en adelante.

Por ejemplo, si k representa la dirección x y g la segunda componente del vector, tenemos

$$\overline{D}_{x,2} \approx \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} D_{x,2} dy dx = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \frac{\partial (hT_{xx})}{\partial x} dy dx, \quad (3.10)$$

que simplificando

$$\overline{D}_{x,2} \approx \Delta y [hT_{xx}]_{x_{i-1/2,j}}^{x_{i+1/2,j}}, \quad (3.11)$$

donde $[\cdot]_b^a$ es la diferencia discreta de (\cdot) entre los puntos $(\cdot)_a - (\cdot)_b$. Se propone la siguiente aproximación de la derivada de la ecuación (2.5)

$$(\partial_x u)_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \quad (\partial_x u)_{i-1/2,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (3.12)$$

donde

$$(\partial_x u)_{i+1/2,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2,j}} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (3.13)$$

$$(\partial_x u)_{i-1/2,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2,j}} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (3.14)$$

son aproximaciones de primer orden, siendo el término del lado izquierdo la derivada numérica, el primero del lado derecho la derivada exacta y el último el término de error. Si calculamos el calado en las paredes de la celda como el valor promedio a ambos lados

$$h_{i+1/2,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i,j}}{2} \quad , \quad h_{i-1/2,j} = \frac{h_{i-1,j} + h_{i,j}}{2} \quad , \quad (3.15)$$

entonces (3.11) se aproxima por

$$\bar{D}_{x,2} = \Delta y \left((2h\nu_e \partial_x u)_{i+1/2,j} - (2h\nu_e \partial_x u)_{i-1/2,j} \right) . \quad (3.16)$$

Si se sigue un proceso análogo con $\bar{D}_{y,3}$ se tiene

$$\bar{D}_{y,3} = \Delta x \left((2h\nu_e \partial_y v)_{i,j+1/2} - (2h\nu_e \partial_y v)_{i,j-1/2} \right) . \quad (3.17)$$

El proceso a seguir con $\bar{D}_{y,2}$ es similar

$$\bar{D}_{y,2} \approx \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} D_{y,2} dy dx = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \frac{\partial (hT_{xy})}{\partial y} dy dx , \quad (3.18)$$

que integrando resulta en

$$\bar{D}_{y,2} = \Delta x [hT_{xy}]_{y_{i,j-1/2}}^{y_{i,j+1/2}} . \quad (3.19)$$

De forma equivalente, se proponen las siguientes aproximaciones para (2.6)

$$(\partial_y u + \partial_x v)_{i,j+1/2} = \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j}}{2} - \frac{v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j}}{2} \right) \right) , \quad (3.20)$$

$$(\partial_y u + \partial_x v)_{i,j-1/2} = \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{2} - \frac{v_{i-1,j} + v_{i-1,j-1}}{2} \right) \right) , \quad (3.21)$$

siendo

$$(\partial_y u)_{i,j+1/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y_{i,j+1/2}} + \mathcal{O}(\Delta y) , \quad (3.22)$$

$$(\partial_x v)_{i,j+1/2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y_{i,j+1/2}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) , \quad (3.23)$$

$$(\partial_y u)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y_{i,j-1/2}} + \mathcal{O}(\Delta y) , \quad (3.24)$$

$$(\partial_x v)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y_{i,j-1/2}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.25)$$

Las aproximaciones en (3.22)-(3.25) son aproximaciones de primer y segundo orden. Si volvemos a calcular el calado en las paredes como el valor promedio de ambas celdas se llega a

$$\bar{D}_{y,2} = \Delta x \left((h\nu_e (\partial_y u + \partial_x v))_{i,j+1/2} - (h\nu_e (\partial_y u + \partial_x v))_{i,j-1/2} \right) . \quad (3.26)$$

Por claridad, se ha dibujado el stencil usado para el cálculo de $\frac{\partial v}{\partial x}$ en la pared superior de la celda Ω_{ij} en la Figura 3.4.

La siguiente consideración se propone como limitación de las derivadas en caso de que existan grandes gradientes con cambio de signo. Vamos a considerar el caso de derivadas cruzadas, como el de la Figura

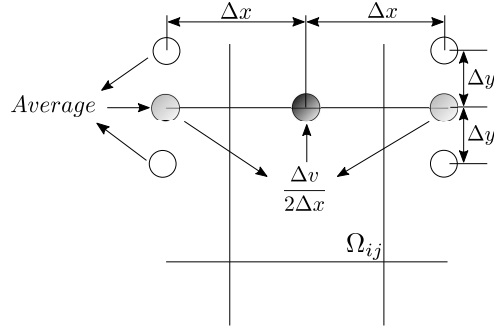


Figura 3.4: Stencil usado para la discretización de $\partial v / \partial x$ en la pared superior de la celda Ω_{ij} .

3.4. El valor promedio en la pared $j + \frac{1}{2}$ se impondrá como cero si el signo de las derivadas en las paredes $(x_{i+1}, y_{j+1/2})$ y $(x_{i-1}, y_{j+1/2})$ es diferente. Si el signo cambia, entonces $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Esta comparación se lleva a cabo para los casos en los que se realice la derivada de valores promedio.

Se sigue un proceso análogo tomando aproximaciones similares para obtener una aproximación de $\overline{D}_{x,3}$

$$(\partial_y u + \partial_x v)_{i+1/2,j} = \left(\frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}}{2} \right) + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} \right), \quad (3.27)$$

$$(\partial_y u + \partial_x v)_{i-1/2,j} = \left(\frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}}{2} - \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}}{2} \right) + \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \quad (3.28)$$

llegando a

$$\overline{D}_{x,3} = \Delta y \left((h \nu_e (\partial_y u + \partial_x v))_{i+1/2,j} - (h \nu_e (\partial_y u + \partial_x v))_{i-1/2,j} \right). \quad (3.29)$$

En caso de que existan contornos sólidos alrededor de una celda, todas las derivadas en cuyo stencil intervengan dichas celdas tomarán valor cero.

Para asegurar que la implementación de esta discretización es correcta, se realizan varios test, mostrando el correspondiente orden de convergencia. Cabe destacar que aunque las derivadas como (3.13) o (3.14) son aproximaciones de primer orden, se consigue una aproximación de segundo orden al realizar una derivación centrada con los valores en las paredes, ya que lo que se busca son valores en los centros de las celdas. Explicaciones adicionales de tal hecho y resultados numéricos de la convergencia a ejemplos analíticos se presentan en el Apéndice C.1 y en la Sección 5.2. También se puede ver una demostración analítica del orden de error de esta discretización en el Apéndice B.4.

Capítulo 4

Análisis de datos experimentales de flujos turbulentos

Para comprobar la validez del método numérico, se propone comparar resultados de simulaciones con datos tomados experimentalmente. Para esto, se han elegido dos casos experimentales con zonas de separación de flujo existentes en la bibliografía [17, 39]. El primero consiste en un canal recto en el cual un flujo se expande a una anchura del doble de la anchura inicial, expandiéndose el canal solamente en un sentido de la dirección transversal. El segundo caso es algo más complejo, consta de un canal en forma de T por el cual entra un caudal que ha de dividirse entre el canal principal y el canal ramificado. En este capítulo se proporcionan los detalles tanto de la geometría de cada caso como de los datos experimentales disponibles, así como del tratamiento de datos en crudo, necesario para realizar de forma sistemática las comparaciones y análisis de sensibilidad posteriores.

4.1. Canal recto con expansión

Este caso consiste en un canal cuya geometría puede verse en la Figura 4.1. Consta de una expansión repentina en un canal revestido de cemento de 18 metros de largo y una anchura máxima de 1.2 metros. La pendiente del fondo es de 1/1000. La anchura del canal pasa de 0.6 a 1.2 metros de anchura en la sección situada a 7.7 metros desde la entrada del canal. El experimento se llevó a cabo para dos caudales, 0.01815 y 0.03854 m^3/s , aunque en este trabajo solo se consideran los resultados para el caudal $Q = 0.01815 m^3/s$. Los datos experimentales constan de los perfiles de la componente horizontal de la velocidad, que se midieron en 6 secciones transversales distintas. La primera justo antes de la expansión y el resto, cada metro de distancia aguas abajo. En este caso aparece una zona de recirculación estacionaria de 4.6 metros de longitud después de la expansión. Se define esta distancia como la distancia más alejada de la sección de la expansión para la cual las líneas de corriente se separan, siguiendo algunas aguas abajo y otras entrando en la zona del vórtice. También puede verse como la distancia de la sección transversal más alejada de la expansión para la cual dejan de haber velocidades en sentido aguas arriba.

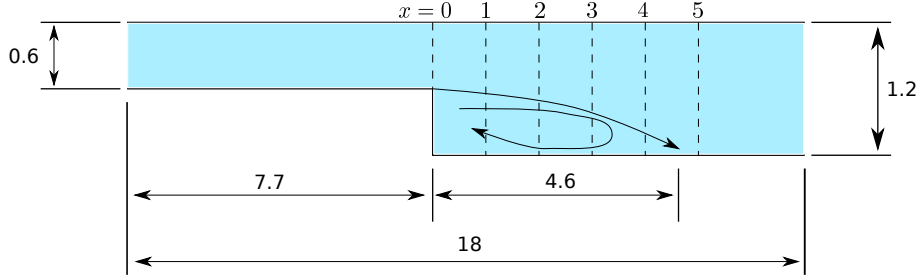


Figura 4.1: Detalles del experimento de una expansión repentina donde se midieron los valores de la componente horizontal de velocidad a lo largo de las secciones marcadas con línea discontinua. Las distancias están en metros.

4.2. Canal en T

Este caso consiste en un canal en forma de T, cuya geometría se puede ver en la Figura 4.2. El canal principal mide 6.198 m de largo y la ramificación mide 2.794 m. El canal tiene 0.305 m de alto y 0.61 m de ancho. Las paredes, de 12.7 mm de grosor, son de Plexiglas. La ramificación está situada a 2.794 m de la entrada del canal principal, formando un ángulo de 90° con éste. El fondo carece de pendiente y los caudales se controlan con aliviaderos. El flujo pasa por unos paneles antes de llegar al canal principal para asegurar un flujo con poca turbulencia.

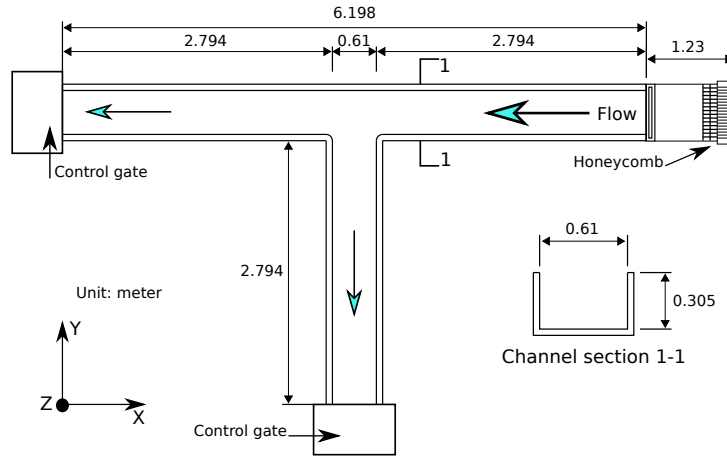


Figura 4.2: Detalles de las dimensiones del experimento con un canal en forma de T.

A diferencia del caso de la expansión repentina, en el que se puede ver una zona de separación de flujo, en el caso de un canal en forma de T pueden verse varios fenómenos debido a que el caudal de entrada debe dividirse entre una ramificación y una extensión del canal principal. Esto produce zonas de recirculación aguas abajo del canal principal y en la ramificación, así como un punto de estancamiento en la esquina del canal cercana a la zona aguas abajo del canal principal en la entrada de la ramificación, donde las líneas de corriente se dividen y continúan aguas abajo por el canal principal y por la ramificación. Todo esto se representa en la Figura 4.3.

El aspecto de resultados como velocidad, calado y tamaño de zonas de recirculación varía en función del caudal relativo, definido aquí como

$$Q_r = Q_b / Q_u, \quad (4.1)$$

siendo Q_b el caudal dirigido por la ramificación y Q_u el caudal que circula por el canal principal aguas arriba. Por tanto, por conservación de masa, el caudal que sale aguas abajo del canal principal se define como

$$Q_d = Q_u - Q_b. \quad (4.2)$$

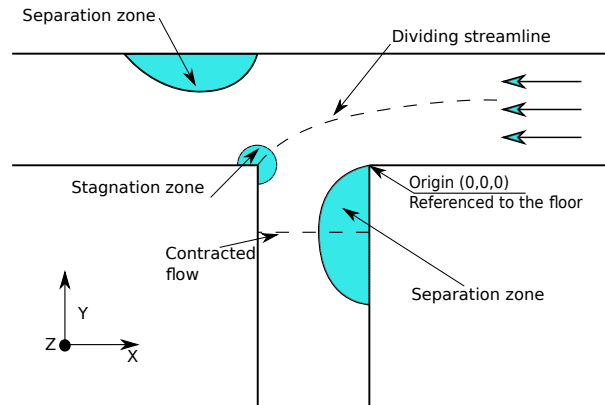


Figura 4.3: Zonas relevantes que aparecen en un canal en T.

En la bibliografía se pueden encontrar velocidades y calados en diferente cantidad de secciones dependiendo del Q_r , que toma valores de 0.149, 0.308, 0.409, 0.672 y 0.838 en el experimento original. Las simulaciones hechas sobre este caso se realizan en base al caudal relativo $Q_r = 0,409$ (ver Tabla D.1), dada la resolución de datos experimentales para este Q_r . No obstante, dada la cantidad de información existente para este caso experimental y con el fin de facilitar trabajos posteriores, se ha realizado un trabajo de digitalización y trato de la misma, obteniendo numerosas gráficas de todos los perfiles de las componentes de velocidad horizontales para todos los Q_r disponibles, así como representaciones tridimensionales de los campos de velocidades y de los calados. También se han tratado los datos disponibles para obtener, mediante un promedio en la coordenada vertical, los campos de velocidad bidimensionales y se han propuesto hipótesis para obtener perfiles de velocidad completos desde el fondo hasta la superficie, comparando la velocidad promedio obtenida y calculando las desviaciones típicas. Además, se ha realizado una regresión lineal para la anchura de la zona de recirculación en el canal ramificado en una sección a 0.4453 m de la entrada del mismo. Un análisis en detalle de todo esto se puede consultar en el Apéndice D, donde se explica cómo se han realizado las siguientes tareas:

- Digitalización de los datos experimentales mediante reconocimiento de caracteres y exportación a Matlab para tratamiento posterior.
- Organización y representación en altura de los perfiles de velocidad experimentales. Todas las figuras de los cinco Q_r se encuentran en el Apéndice E.
- Representaciones tridimensionales de campos de velocidades experimentales, Figuras E.2, E.8, E.14, E.23 y E.29 izquierda.
- Representaciones 2D de los calados, Figuras E.2, E.8, E.14, E.23 y E.29 derecha.
- Cálculo del promedio en la altura de los campos de velocidad experimentales mediante la regla del trapecio compuesta sin tener en cuenta velocidad nula en el fondo, incluyendo exclusivamente los datos experimentales disponibles. Adicionalmente, se muestra un test comparativo en el que se realiza el promedio teniendo en cuenta velocidad nula en el fondo, así como hipótesis presentadas en la Sección D.3. Los resultados de este test se pueden observar en las Tablas D.4 y D.5.
- Cálculo y representación de las desviaciones típicas en la vertical de los promedios de las velocidades \bar{u} y \bar{v} . Se encuentran en la parte superior de las Figuras E.3, E.9, E.15, E.24 y E.30.
- Cálculo y representación 2D de la magnitud de la velocidad promediada $|\bar{\mathbf{V}}_{2d}| = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$. Se encuentran en la parte inferior de las Figuras E.3, E.9 e inferior izquierda de las Figuras E.15, E.24 y E.30.
- Cálculo y representación de la velocidad promedio en la vertical. Se encuentran en la parte inferior derecha de las Figuras E.15, E.24 y E.30.
- Cálculo de la cuasi-bidimensionalidad de los campos de velocidades promediadas en la vertical y de su desviación típica, Tabla D.2.

- j) Regresión lineal de la anchura de la zona de recirculación en la sección $y = -0,4453 \text{ m}$ dependiendo de Q_r , Figura D.9.

Capítulo 5

Validación del esquema numérico y análisis de resultados

En este capítulo se muestran resultados numéricos para 5 casos test distintos con los que se pretende validar el método numérico utilizado en este trabajo, aportando en cada caso las medidas de errores relativos correspondientes, normas vectoriales de error y ordenes de convergencia, cuando sea necesario.

En el Test 1 se comprueba que la aproximación numérica de las derivadas espaciales de los términos difusivos, explicada en la Sección 3.2, se ha implementado de manera correcta en el código original. Además, se calcula el orden de convergencia de la misma y se demuestra analíticamente el resultado mediante una derivación del error de truncamiento usando series de Taylor.

En el Test 2 se valida la implementación del método numérico para la discretización de los términos difusivos. Esta validación se lleva a cabo mediante la simulación de un caso con solución analítica para la ecuación de convección-difusión lineal. El error se mide utilizando tres normas de error distintas y se realiza un análisis de convergencia con el refinamiento de malla.

En el Test 3 se propone un caso de flujo viscoso de lámina libre en un canal recto, cuya solución analítica se deriva de las SWE. Esto se consigue imponiendo la condición de no deslizamiento en las paredes del canal y haciendo algunas simplificaciones que se explican. Se calcula el orden de convergencia a la solución analítica al refinar la malla y al usar esquemas numéricos de mayor orden.

En el Test 4 se simula el caso experimental de la expansión repentina, explicado en la Sección 4.1, del cual se realizan varios análisis de sensibilidad con el fin de obtener una configuración de parámetros que resulte en el menor error posible con respecto de la información experimental disponible en la bibliografía. Esta consta de los perfiles de velocidad horizontal en 6 secciones y de la longitud de recirculación del vórtice que se origina.

El Test 5 consta de simulaciones del caso experimental del canal en forma de T, explicado en la Sección 4.2, del que se realiza un proceso de calibración con el fin de reflejar todos los fenómenos que tienen lugar en esta configuración de canal con el mínimo error posible.

5.1. Test 1: Análisis de convergencia de la aproximación de las derivadas

Es necesario comprobar que la implementación de la discretización propuesta para las derivadas espaciales de los términos difusivos es correcta. Para ello, se han comparado resultados numéricos de la misma con resultados analíticos calculados con Matlab.

En este test se propone la siguiente función Gaussiana como condicion inicial

$$g(x, y) = 0,2 \exp \left(-\frac{(x-50)^2 + (y-50)^2}{80} \right), \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (5.1)$$

siendo el dominio computacional $\Omega = [0, 100] \times [0, 100]$. Se ha calculado $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ en los centros de las celdas de dos mallas distintas. Una de ellas de 20×20 ($\Delta x = 5 \text{ m}$) y la otra de 200×200 ($\Delta x = 0,5 \text{ m}$), siendo ambas mallas cartesianas. La función Gaussiana (5.1) y su derivada analítica respecto de x se representan en el Apéndice C.1 con datos analíticos de Matlab para ambas mallas.

Para calcular el orden de convergencia de la discretización, se ha calculado la norma L_1 de los vectores de error

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |u_i - u(x_i)| (\Delta x)^2, \quad (5.2)$$

donde u_i , $u(x_i)$ son valores numéricos y analíticos respectivamente. La norma L_1 se ha multiplicado por el área de celda para normalizar y comparar los errores de las dos mallas utilizadas, dado que los errores se calculan en todas las celdas y no en una sola dimensión. Los resultados de errores absolutos de las derivadas se presentan en la Figura 5.1, donde se observa que el error absoluto disminuye en dos ordenes de magnitud al refinar la malla en un orden de magnitud. Esta convergencia de orden dos se observa en la Figura 5.2 en escala logarítmica que muestra la norma 1 de error L_1 en función del número de celdas en x o en y , dado que la malla es cuadrada.

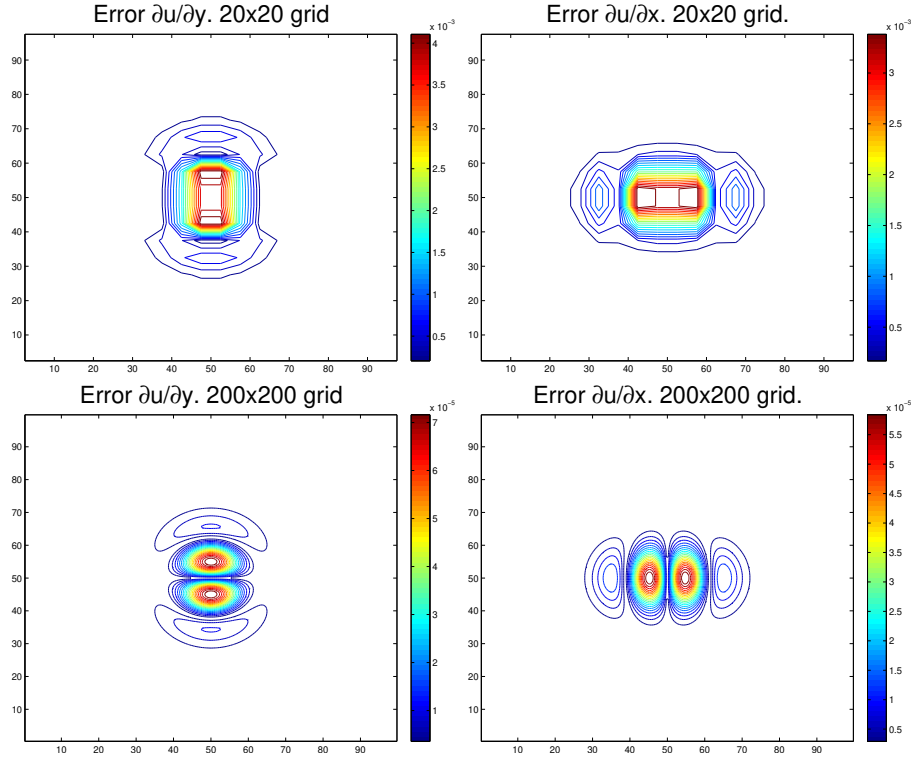


Figura 5.1: Errores absolutos de las derivadas $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ de la función Gaussiana elegida. Se corresponden con las dos mallas, una de 20×20 ($\Delta x = 5 \text{ m}$) y otra de 200×200 ($\Delta x = 0,5 \text{ m}$).

Es por esto que en la Figura 5.2 se observa un orden 2 de convergencia a la solución exacta. Dicho orden de convergencia se calcula con la expresión siguiente [31]

$$n = \frac{\ln((L_1)_1 / (L_1)_2)}{\ln(\Delta x_1 / \Delta x_2)}, \quad (5.3)$$

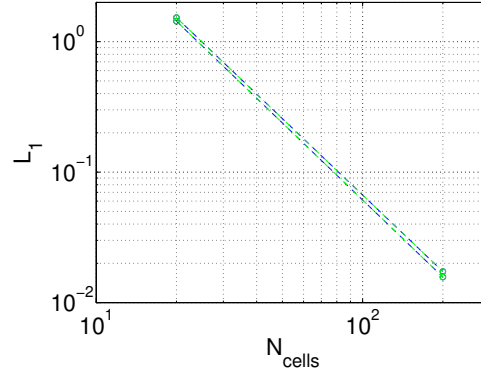


Figura 5.2: Representación de la norma L_1 de error multiplicada por el área de celda vs el número de celdas en la dirección x o en y de la malla cartesiana sobre la que se ha llevado a cabo el análisis de convergencia. Se observa que la discretización de las derivadas propuesta converge a la solución analítica con orden 2.

obteniendo unos valores de 1,96 and 1,94 para los errores calculados mediante la expresión (5.2). Los subíndices 1 corresponden a L_1 y Δx de la malla de 20×20 . Los subíndices 2 corresponden a la malla de 200×200 . Estos valores de L_1 se presentan en la Tabla 5.1. Dada la simetría del ejemplo de la función Gaussiana, los errores de las derivadas cruzadas, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, son los mismos. Esto también ocurre para el resto de derivadas ($\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$), como se puede ver en la Figura 5.2, donde los resultados aparecen superpuestos.

Los órdenes de convergencia de las derivadas numéricas están directamente relacionados con el número de celdas que intervienen en el cálculo. La demostración mediante expansiones en series de Taylor se explica en el Apéndice C.1.

	20x20 grid	200x200 grid
$L_1 \partial u / \partial x$	1.4341	0.0157
$L_1 \partial u / \partial y$	1.5285	0.0173
$L_1 \partial v / \partial x$	1.5285	0.0173
$L_1 \partial v / \partial y$	1.4341	0.0157

Tabla 5.1: Resultados de los errores de la discretización de las derivadas calculados en Matlab mediante la expresión (C.2).

5.2. Test 2: Análisis de convergencia de la ecuación de convección-difusión

En esta sección se valida la implementación de la discretización propuesta para los términos difusivos utilizando soluciones analíticas para la ecuación de transporte lineal. Para ello, se propone la resolución numérica de la ecuación de convección-difusión de un soluto cualquiera para un caso unidimensional sin términos fuente.

Se consideran las ecuaciones de conservación de masa y de momento en dirección x de las SWE para un caso 1D, sin fricción ni variación de fondo, y con viscosidad turbulenta constante

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} gh^2 + hu^2 \right) = \nu \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2}. \quad (5.5)$$

Adicionalmente, se considera la ecuación para el transporte de un soluto en el fluido

$$\frac{\partial (h\phi)}{\partial t} + \frac{\partial (hu\phi)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 (h\phi)}{\partial x^2} , \quad (5.6)$$

que también incluye el correspondiente término difusivo. Para simplificar la ecuación (5.6), suponemos un flujo estacionario con

$$h = 1 \text{ m} \quad , \quad hu = \lambda \equiv \mathcal{C} , \quad (5.7)$$

obteniendo la ecuación de convección-difusión lineal para el transporte de un soluto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} . \quad (5.8)$$

Si se aplica la condición inicial Gaussiana

$$\phi(x, 0) = \exp \left[-\mathcal{C}_1 (x - \mathcal{C}_2)^2 \right] , \quad (5.9)$$

se obtiene la solución analítica de (5.8)

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\mathcal{C}_1\nu t}} \exp \left[\frac{-\mathcal{C}_1 (x - \mathcal{C}_2 - \lambda t)^2}{1 + 4\mathcal{C}_1\nu t} \right] , \quad (5.10)$$

con $\mathcal{C}_1 = 1/25$, $\mathcal{C}_2 = 25$ y $\nu = 0,005 \frac{m^2}{s}$.

Para este caso consideraremos el dominio computacional $\Omega \times T = [0, 50] \times [0, 400]$ con condiciones de contorno periódicas. Se considerarán dos casos distintos: convección-difusión y sólo difusión.

- Caso 1: Convección-difusión

$$\lambda = 1 \frac{m}{s} . \quad (5.11)$$

- Caso 2: Difusión

$$\lambda = 0 \frac{m}{s} . \quad (5.12)$$

En las Figuras 5.3 y 5.4 se presentan los resultados de dos mallas distintas para los dos casos, una con $\Delta x = 1 \text{ m}$ y otra con $\Delta x = 0,0125 \text{ m}$. La solución se calcula en $t = 400 \text{ s}$ utilizando el esquema WENO-ADER de primer y tercer orden para la convección y la discretización de segundo orden propuesta para la difusión. Para garantizar la estabilidad de la solución, se impone una condición de $CFL + Pe = 0,3$.

La gráfica de la función (5.9) se presenta junto con resultados numéricos de los esquemas de primer y tercer orden para el Caso 1 en la Figura 5.3. En dicha Figura, se observa una mejora notable al usar el esquema numérico de alto orden. El error no es apreciable a simple vista en el caso de la malla refinada de la Figura 5.3 derecha. También se calcula el orden de convergencia para mallas con 25, 50, 100, 200 y 400 celdas.

En el Caso 2, donde solo existe difusión, se observan resultados numéricos con bajo error en comparación con el Caso 1 en la Figura 5.4 izquierda. Para hacer visible la convergencia con el refinamiento de malla, se muestra un detalle en la Figura 5.4 derecha. Se calculan adicionalmente las normas de error 1, 2 e infinito para mallas con 25, 50, 100, 200 y 400 celdas con el fin de calcular el orden de convergencia de los esquemas numéricos, comprobando así la derivación del error de truncamiento explicado en el Apéndice B.4.

La norma 1, 2 e infinito del vector de errores absolutos se calcula respectivamente como

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |\phi_i - \phi(x_i)| (\Delta x) , \quad (5.13)$$

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_i - \phi(x_i)|^2 (\Delta x)} , \quad (5.14)$$

$$L_\infty = \max(|\phi_i - \phi(x_i)|) , \quad (5.15)$$

donde ϕ_i y $\phi(x_i)$ son valores numéricos y analíticos respectivamente. Las normas de error 1 y 2 se han multiplicado por el ancho de celda para normalizarlas y comparar los errores de las distintas mallas.

Las normas de error para el Caso 1 (convección-difusión) se presentan en la Tabla 5.2, donde se muestra un orden de convergencia que tiende a un valor alrededor de 3 a medida que se refina la malla. Este orden coincide para las tres normas de error calculadas. En la Tabla 5.3 se exponen las normas de error del Caso 2 (difusión), donde se observa un orden 2 de convergencia en todas ellas desde el grado de refinamiento inicial.

Por tanto, se ha validado el orden 2 de convergencia de la discretización propuesta para las derivadas de los términos de difusión turbulenta de la ecuación (2.1). También se ha comprobado el adecuado funcionamiento de dicha discretización en presencia de convección, en conjunto con esquemas de orden arbitrario de tipo WENO-ADER.

En vista de la elevada difusión numérica del esquema de orden 1, visible en la Figura 5.3 izquierda, podemos concluir que es necesario utilizar un alto orden de precisión en la convección para obtener una solución con un nivel de error aceptable sin tener que refinar excesivamente la malla. También se observa que el error producido por el esquema numérico de orden 3 de los efectos convectivos es mayor que el que se obtiene con el esquema de orden 2 de los términos difusivos. Esto se puede ver al comparar las Figuras 5.3 derecha y 5.4 derecha. Cuando solo se tienen en cuenta los efectos difusivos, el resultado tiene un error menor respecto de la solución analítica.

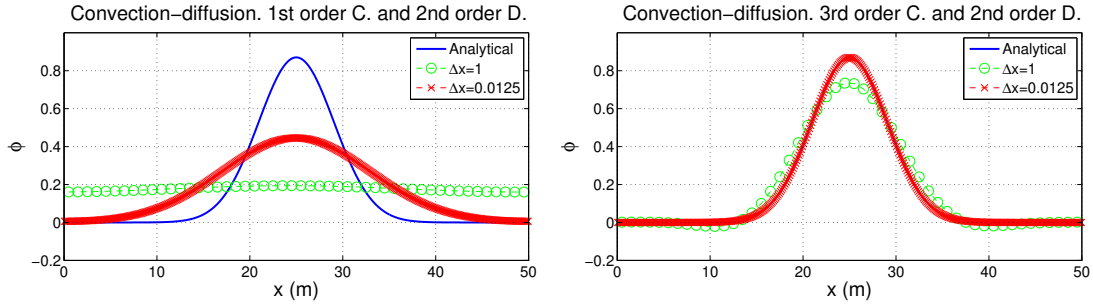


Figura 5.3: Izquierda: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 1 en $t = 400s$ con un esquema de orden 1. Derecha: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 1 en $t = 400s$ con un esquema de orden 3.

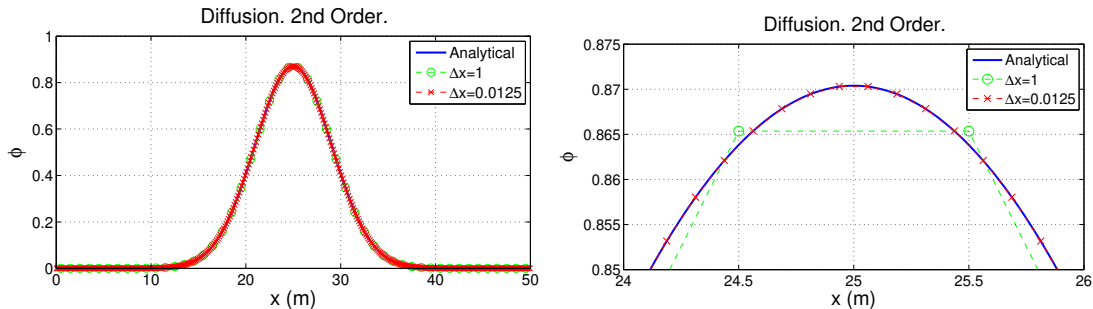


Figura 5.4: Izquierda: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 2 en $t = 400s$ con un esquema de orden 2 de los términos difusivos. Derecha: Detalle de la imagen izquierda donde se observa la convergencia a la solución analítica al refinar la malla.

Celdas	Err_{L_1}	\mathcal{O}_{L_1}	Err_{L_2}	\mathcal{O}_{L_2}	Err_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_∞}
25	4.802662		0.8960426		0.32216182	
50	1.6671804	1.52	0.34944157	1.35	0.13149059	1.29
100	0.3142674	2.41	0.0726759	2.26	0.02989527	2.13
200	0.0407573	2.94	0.0095977	2.92	0.00408395	2.87
400	0.0045478	3.16	0.00106257	3.17	0.00045065	3.18

Tabla 5.2: Errores y ordenes de convergencia obtenidos para el caso de convección-difusión. Esquema numérico de orden 3.

Celdas	Err_{L_1}	\mathcal{O}_{L_1}	Err_{L_2}	\mathcal{O}_{L_2}	Err_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_∞}
25	0.0622966		0.0145279		0.00639087	
50	0.01517596	2.03	0.00364662	1.99	0.0015347	2.05
100	0.00378391	2.00	0.00091011	2.00	0.00039366	1.96
200	0.00093929	2.01	0.0002263	2.00	0.00009855	1.99
400	0.00023212	2.01	0.00005594	2.01	0.0000244	2.01

Tabla 5.3: Errores y ordenes de convergencia obtenidos para el caso de difusión. Esquema numérico de orden 2.

5.3. Test 3: Análisis de convergencia para un flujo viscoso con solución analítica

Para comprobar la validez del método numérico, se propone la simulación de un problema de flujo viscoso de lámina libre con solución analítica. Se compararán resultados numéricos y analíticos del perfil de velocidad para un flujo desarrollado en un canal recto en el que se impone la condición de no deslizamiento en las paredes. La geometría del problema se presenta en la Figura 5.5

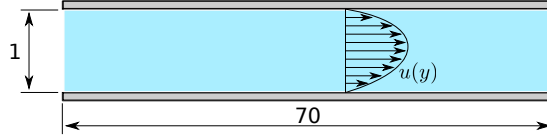


Figura 5.5: Dimensiones del dominio computacional en metros.

Se consideran las ecuaciones de conservación de masa y momento, en el eje x , de las SWE. A partir de ellas, suponiendo viscosidad cinemática constante y teniendo en cuenta una pendiente de fondo constante, hay que realizar consideraciones tales como

- Flujo totalmente desarrollado
- Flujo estacionario
- Variaciones de calado nulas a lo largo de las secciones perpendiculares a la dirección del flujo
- Condición de no deslizamiento en las paredes del canal
- Despreciar el rozamiento con el fondo
- Calado h unitario
- Anchura L del canal unitaria
- Aceleración de la gravedad $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

para obtener la expresión analítica siguiente, cuya derivación puede consultarse en detalle en el Apéndice C.2,

$$u(y) = \frac{g}{\nu} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{Ly}{2} \right). \quad (5.16)$$

Las constantes ν y $\frac{\partial z}{\partial x}$ toman los siguientes valores dependiendo del caso propuesto:

- Caso 1:

$$\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-3}. \quad (5.17)$$

- Caso 2:

$$\nu = 10^{-2} \frac{m^2}{s}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-2}. \quad (5.18)$$

Ambos casos tienen la misma solución analítica, ya que la viscosidad y la pendiente tienen la misma magnitud. Entonces

$$u(y) = -\frac{g}{2} (y^2 - y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (5.19)$$

Para imponer las condiciones de contorno adecuadas en las simulaciones, se ha calculado el caudal, que por definición es

$$Q = L \int_0^1 hu(y)dy = -\frac{g}{2} \int_0^1 (y^2 - y) dy = \frac{g}{12}. \quad (5.20)$$

Dado que la anchura del canal es la unidad, este caudal es el unitario.

Se simulan los casos en (5.17) y (5.18) de diferentes viscosidades cinemáticas con esquemas numéricos de primer y tercer orden usando dos mallas, una de $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ y otra de $\Delta x = 0,04 \text{ m}$. La configuración del caso es la siguiente. Aguas arriba se impone el caudal dado por la Ecuación (5.20), aguas abajo se impone el calado unitario y en las paredes se impone la condición de no deslizamiento. La longitud del canal es de 70 m para que el flujo se desarrolle. Dadas las condiciones impuestas en la derivación de la solución analítica, el flujo es subcrítico, con un número de Froude máximo $Fr_{max} \approx 0,4$ y un número de Reynolds máximo $Re_{max} \approx 1230$ para el primer caso, lo que corresponde con un flujo laminar.

Se calcula la norma 1 de error del vector de errores absolutos para obtener el orden de convergencia a la solución analítica propuesta, siguiendo la expresión

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |u_i - u(x_i)| (\Delta x) , \quad (5.21)$$

donde u_i y $u(x_i)$ son valores numéricos y analíticos respectivamente. La norma 1 de error se ha multiplicado por el ancho de celda para normalizarla y comparar los errores de las dos mallas, dado que se comparan las velocidades en una dimensión.

El orden de convergencia se calcula con la expresión

$$n = \frac{\ln((L_1)_1 / (L_1)_2)}{\ln(\Delta x_1 / \Delta x_2)} , \quad (5.22)$$

donde los subíndices 1 corresponden a $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ y los subíndices 2 corresponden a $\Delta x = 0,04 \text{ m}$. A mayor refinamiento de la malla, el error es menor, como se puede ver en las Figuras 5.6 y 5.7, donde se presentan los perfiles de velocidades a una distancia de 50 metros de la entrada, donde el flujo está desarrollado.

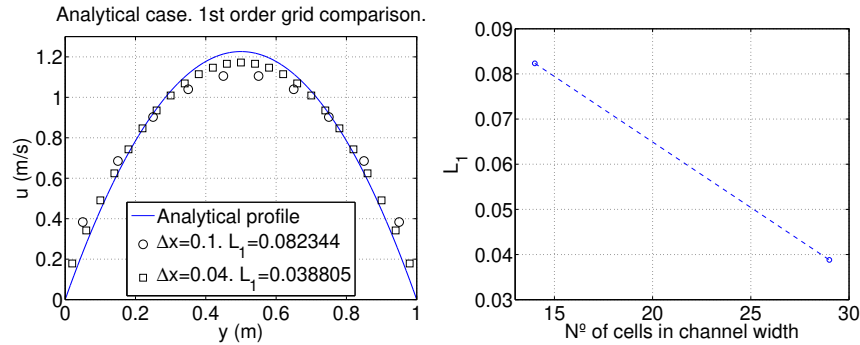


Figura 5.6: Izquierda: Perfil de velocidad analítico $u(y)$ y resultados numéricos obtenidos con el esquema numérico de primer orden, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$. Derecha: Norma de error L_1 versus número de celdas en dirección y .

En las mismas imágenes, se observa que al utilizar un esquema numérico de orden 3, el error apenas disminuye. Esto es debido a la alta influencia de las condiciones de contorno en la solución. En la Figura 5.8 izquierda, se muestra la evolución del calado con la coordenada horizontal a lo largo del canal. En ella se observa la condición de contorno aguas abajo además de mostrar una dependencia con el tamaño de celda. Cuanto más fina es la malla, mejor aproxima la solución analítica. Lo mismo se puede ver en la Figura 5.8 derecha, donde la velocidad a lo largo de la línea central del canal se aproxima a la analítica cuanto mayor es el refinamiento de la malla. De este gráfico se observa que el flujo puede considerarse desarrollado para $x \approx 50 \text{ m}$.

Dicho desarrollo del flujo se dibuja en la Figura 5.9, donde se presentan los perfiles de velocidad en diferentes secciones transversales a lo largo del canal. Nuevamente, se aprecia que el flujo está desarrollado alrededor de $x \approx 50 \text{ m}$. La solución numérica se aproxima asintóticamente a la solución en la dirección del flujo.

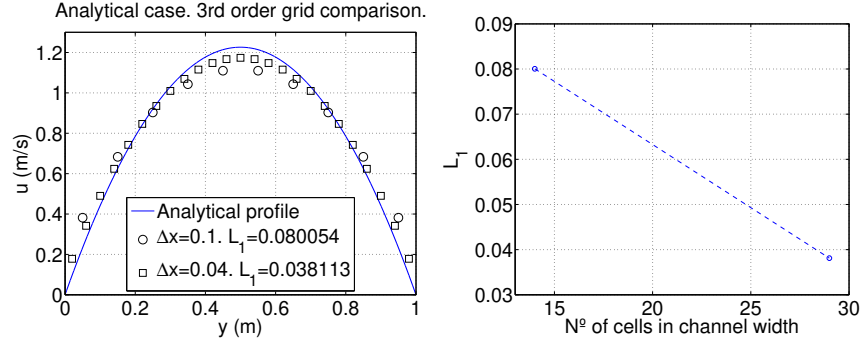


Figura 5.7: Izquierda: Perfil de velocidad analítico $u(y)$ y resultados numéricos obtenidos con el esquema numérico de tercer orden, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$. Derecha: Norma de error L_1 versus número de celdas en dirección y .

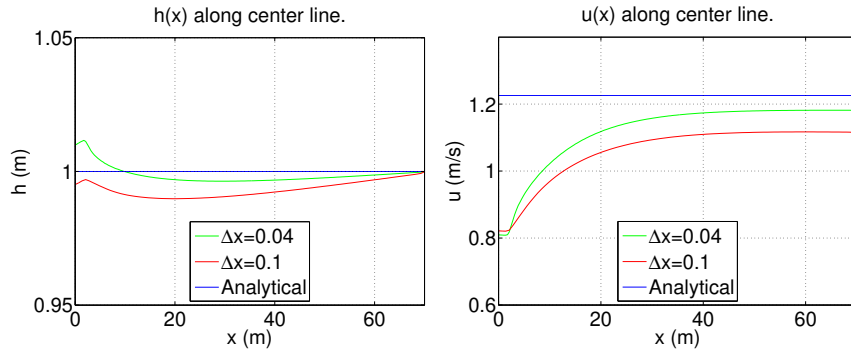


Figura 5.8: Izquierda: Calado a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando la condición de contorno aguas abajo. Derecha: u a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando el desarrollo de la velocidad. Resultados numéricos con esquema de orden 3, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$.

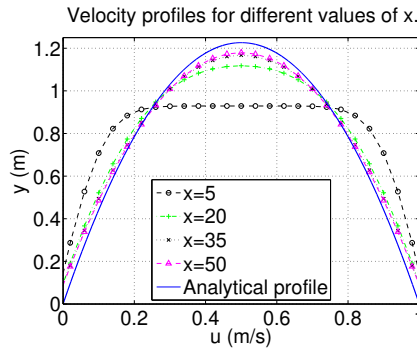


Figura 5.9: Perfiles de velocidad para diferentes secciones transversales a lo largo del canal recto, mostrando el desarrollo del perfil de velocidades. Simulación con esquema numérico de orden 3, $\Delta x = 0,04 m$, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$.

Para el caso dos, definido en (5.18), se realizan tres simulaciones de primer orden usando distinto nivel de refinamiento, $\Delta x = 0,1, 0,04$ y $0,02 m$. Dado que la viscosidad es un orden de magnitud mayor, el Re disminuye en un orden de magnitud. En las Figuras 5.10 izquierda y derecha se observa que cuanto mayor es la viscosidad, mayor debe ser el refinamiento de la malla para proporcionar un mismo nivel de error. Se concluye que la dependencia de la solución con el refinamiento de malla es mayor que con el orden del esquema numérico, para este caso particular.

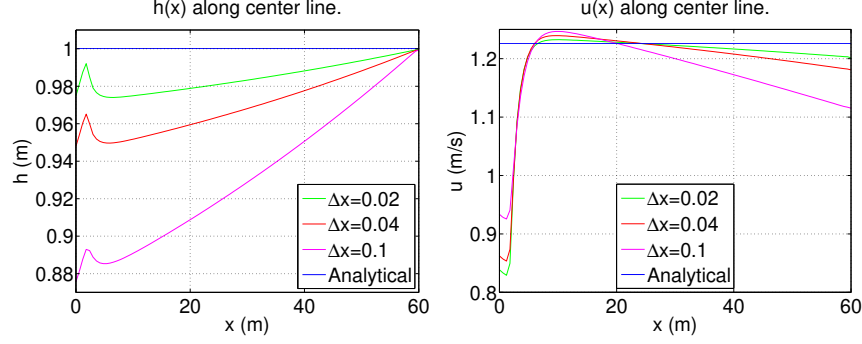


Figura 5.10: Izquierda: Calado a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando la condición de contorno aguas abajo. Derecha: u a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando el desarrollo de la velocidad. Resultados con esquema numérico de orden 1, $\nu = 0,01 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,01$.

5.4. Test 4: Simulación de un canal recto con expansión

En este caso test se ponen en uso los modelos de turbulencia presentados en la Sección 2.3 para la simulación de un flujo estacionario turbulento en un canal con una expansión en la sección transversal, presentado en la Sección 4.1. Estos modelos requieren de parámetros de calibración como λ , β , n_w y y_w . El objetivo es reproducir numéricamente los perfiles de velocidades longitudinales medidos experimentalmente así como la longitud de recirculación del vórtice que aparece aguas abajo de la expansión. Las simulaciones se van a llevar a cabo con la siguiente configuración. Un caudal $Q = 0,01815 \frac{m^3}{s}$ se impone aguas arriba como condición de contorno a lo largo de la sección de entrada al canal. Aguas abajo se impone un calado $h = 0,1 \text{ m}$. El resto de constantes que no se van a usar como parámetros de calibración, ya que son conocidas, se configuran como sigue

$$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-4} \quad g = 9,81 \frac{m}{s^2}. \quad (5.23)$$

En primer lugar, se propone un bucle para averiguar los valores óptimos de λ y β . Dicho bucle consiste en calcular λ siguiendo una función definida por partes a lo largo de la simulación mediante la expresión

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } t < 400 \\ 0,1 + \frac{1,8}{500} (t - 400) & \text{si } 400 \leq t \leq 1600 \end{cases}, \quad (5.24)$$

para cada paso de tiempo. Este bucle se repite para valores de $\beta = 0, 2, 4, 8$ y 12 . Para comparar qué configuración resulta más óptima, se definen los siguientes errores. Dado que hay datos experimentales de 6 secciones, el error en cada sección se calcula como

$$Err_j = \sqrt{\frac{\sum (u_i^{sim} - u_i^{exp})^2}{\sum (u_i^{exp})^2}}, \quad (5.25)$$

donde los superíndices *sim* y *exp* indican datos numéricos y experimentales respectivamente. Hay tantos términos dentro del sumatorio en (5.25) como valores experimentales hay para una sección determinada. Cabe destacar que las posiciones de y para las que hay datos experimentales no tienen por qué coincidir exactamente con las coordenadas de los centros de las celdas de la malla computacional. Por tanto, se usa el valor numérico de velocidad más cercano a la coordenada y experimental para calcular el error en la sección.

El error promedio, que tiene en cuenta los errores de todos los perfiles, se calcula como una media aritmética

$$Err_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^6 Err_j}{6}. \quad (5.26)$$

Se representan las gráficas de (5.26) frente a cómo varia λ a lo largo del tiempo para los distintos valores de β en la Figura C.15. Simulaciones adicionales concluyen que los valores óptimos de estos dos parámetros son $\lambda = 1,3$ y $\beta = 7$. La Figura 5.11 muestra el gráfico resultante de un bucle, donde se observa un valor mínimo. Estos bucles se obtienen con resultados del esquema numérico de orden 3 y un tamaño de celda $\Delta x = 0,025 \text{ m}$. Un script de Matlab utilizado para el cálculo de los errores se muestra en el Apéndice C.3.

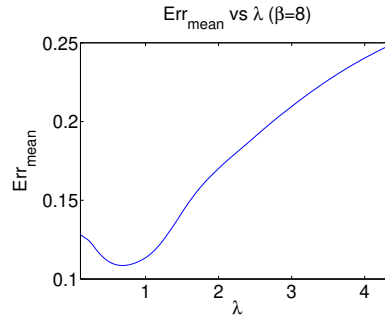


Figura 5.11: Gráfico de Err_{mean} vs λ en el caso de $\beta = 8$. Esquema numérico de orden 3.

En el Apéndice A se proponen y explican dos opciones distintas de calcular el término fuente de fricción \mathbf{S}_f , dependiendo de la aproximación de la fricción con las paredes. Ambas opciones devuelven resultados muy similares, como se puede ver en la Figura C.16, obteniendo resultados ligeramente más cercanos a los experimentales con la aproximación del Manning compuesto y un $n = 0,012$.

Análogamente, en el Apéndice A se deriva una expresión simplificada de la aproximación de Boussinesq. En las Figuras C.18 y C.19 se comparan los resultados que aportan ambas expresiones, usando un esquema numérico de primer orden y otro de tercer orden respectivamente y un tamaño de malla $\Delta x = 0,025 \text{ m}$. Los resultados de ambas expresiones son muy similares para este caso particular. Es por esto que en adelante se concluye en usar la aproximación de Boussinesq, por ser más genérica e incluir fenómenos transitorios donde los gradientes en el calado no se pueden despreciar.

Con el fin de aportar una solución más precisa, una vez que λ y β están calibrados y que las aproximaciones de la fricción y de Boussinesq se han seleccionado, se pasa a estudiar cómo varían los resultados en función de n_w y y_w . Para esto, se simulan 3 casos con $n_w = 0,008, 0,012$ y $0,016 \frac{s}{m^{1/3}}$ cuyos resultados, comparados con datos experimentales se presentan en la Figura C.17. Dichas simulaciones se simulan con el esquema numérico de orden 3 y un ancho de celda $\Delta x = 0,025 \text{ m}$. En casi todos los perfiles no hay una variación significativa en la zona central del perfil, debido a que el coeficiente de rozamiento con el fondo permanece como $n_b = 0,013 \frac{s}{m^{1/3}}$. Los resultados de correspondientes a $n_w = 0,008$ y $0,016 \frac{s}{m^{1/3}}$ se aproximan mejor cerca de las paredes en algunas secciones. No obstante, los resultados están más equilibrados para el caso de $n_w = 0,012$ teniendo en cuenta la longitud de recirculación y las velocidades.

En la Subsección 2.3.2 se explica la importancia del parámetro y_w , por lo que se ha realizado un análisis de sensibilidad del mismo al dividirlo por varios factores 1, 2, 4 y 6. Controlando de así la intensidad de la turbulencia producida por los esfuerzos cortantes cerca de las paredes. Los resultados se muestran en la Figura C.20. En la mayoría de las secciones, $y_w/4$ se aproxima mejor a los resultados experimentales.

Una vez que el proceso de calibración se considera terminado, es de interés mostrar una comparación de los resultados dependiendo del modelo de turbulencia usado en la simulación. Se van a comparar cinco casos, usando el esquema numérico de orden 3 y la misma configuración

$$n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}, \quad y_w/4 \text{ m}, \quad \lambda = 1,3, \quad \beta = 7, \quad \Delta x = 0,025 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}. \quad (5.27)$$

- Opción 1: Sin difusión, por tanto

$$\nu_e = 0. \quad (5.28)$$

- Opción 2: Considerando solamente una viscosidad cinemática de $10^{-3} \frac{m^2}{s}$, luego

$$\nu_e = 10^{-3} \frac{m^2}{s} . \quad (5.29)$$

- Opción 3: Considerando solamente una viscosidad cinemática de $10^{-6} \frac{m^2}{s}$, luego

$$\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s} . \quad (5.30)$$

- Opción 4: Considerando $\nu_e = \nu + \nu_t$, donde ν_t se calcula con el modelo de viscosidad parabólica

$$\nu_t = \lambda U_* h . \quad (5.31)$$

- Opción 5: Considerando $\nu_e = \nu + \nu_t$, donde ν_t se calcula con el modelo de longitud de mezcla

$$\nu_t = \sqrt{(\nu_t^\nu)^2 + (\nu_t^h)^2} . \quad (5.32)$$

En la Figura 5.12 se muestran los perfiles de velocidad promediados en el tiempo. Resultados respecto de la longitud de recirculación se muestran en la Tabla C.2. Los resultados en velocidades son parecidos para las opciones 1 y 3, dado que en estos casos o no hay viscosidad, o es muy pequeña. Por tanto no hay viscosidad suficiente para suavizar gradientes, además hay un flujo inestable debido a la discontinuidad en el campo de velocidades que genera un desprendimiento de vórtices. Esto hace que no aparezca el vórtice estacionario y aparecen otras zonas de recirculación en su lugar, como se puede ver en las Figuras C.22 - C.26 y en la Figura 5.13 (promedios temporales). Los resultados para la opción 2 son interesantes, muestran una buena aproximación a los resultados experimentales, tanto en velocidades como en longitud de recirculación del vórtice a pesar de la simplicidad de esta configuración. Los resultados de este caso no distan demasiado de las opciones 4 y 5, dado que el orden de la viscosidad de remolino en estas es, casualmente, de 10^{-3} . La opción 4 produce altas velocidades en la zona de recirculación, como ocurre en [17], así como una corta longitud del vórtice. El último caso, opción 5, produce una longitud de recirculación con un error relativo del 4,3 %. Además, se ajusta mejor que la opción 4 a los resultados experimentales.

Dado que el modelo de longitud de mezcla da unos resultados equilibrados junto a una más amplia opción de parámetros de calibración, se considera como el adecuado para posteriores simulaciones.

Para continuar con el análisis de sensibilidad, es de interés estudiar si existe un análisis de convergencia dependiendo del refinamiento de la malla. Este análisis se lleva a cabo con un esquema numérico de orden 1 y de orden 3 para casos en los que $\Delta x = 0,1, 0,05, 0,025$ y $0,0125$ m. los perfiles resultantes se pueden ver en las Figuras C.28 y C.29 para el caso de primer y tercer orden respectivamente. En las Tablas C.3 y C.4 se presentan la longitud de recirculación de cada malla junto con su Err_{mean} . El menor error corresponde al caso de primer orden con un tamaño de celda de $\Delta x = 0,025$ m. No se observa convergencia con el refinamiento de malla en las Figuras C.28 y C.29. No obstante, en el caso del esquema numérico de orden 3 se ve que los perfiles tienen menos dispersión debido a la menor difusión numérica propia de usar un método de mayor orden. En cuyo caso Err_{mean} mejora notablemente con respecto al esquema de primer orden a pesar de tener un ancho de celda $\Delta x = 0,1$ m, lo que motiva el uso de métodos de alto orden. Esto se valida de nuevo observando la Figura 5.14, que muestra las líneas de corriente de casos de primer y tercer orden con $\Delta x = 0,025$ m y $\Delta x = 0,1$ m respectivamente, además de otro caso de tercer orden con $\Delta x = 0,025$ m que muestra una longitud de recirculación corta que produce un cambio en la forma del vórtice.

Adicionalmente, se han realizado y comentado comparaciones sobre los Solvers de Riemann, citados en la Sección B.2, que se presentan en el Apéndice C.3, donde se muestra que el solver HLLS es más difusivo que el solver de ARoe. Esto es así porque el solver HLLS aporta una elevada difusión numérica en comparación con el solver de ARoe. El solver de ARoe es menos difusivo per se, lo que motiva su uso para posteriormente tener en cuenta la difusión física mediante la modelización de los términos turbulentos de las RANS. En la Figura C.34 se observan estructuras más detalladas en los resultados correspondientes al solver de ARoe en los que se usa un esquema numérico de orden 3. Esto vuelve a motivar el uso de este solver, así como de esquemas numéricos de alto orden.

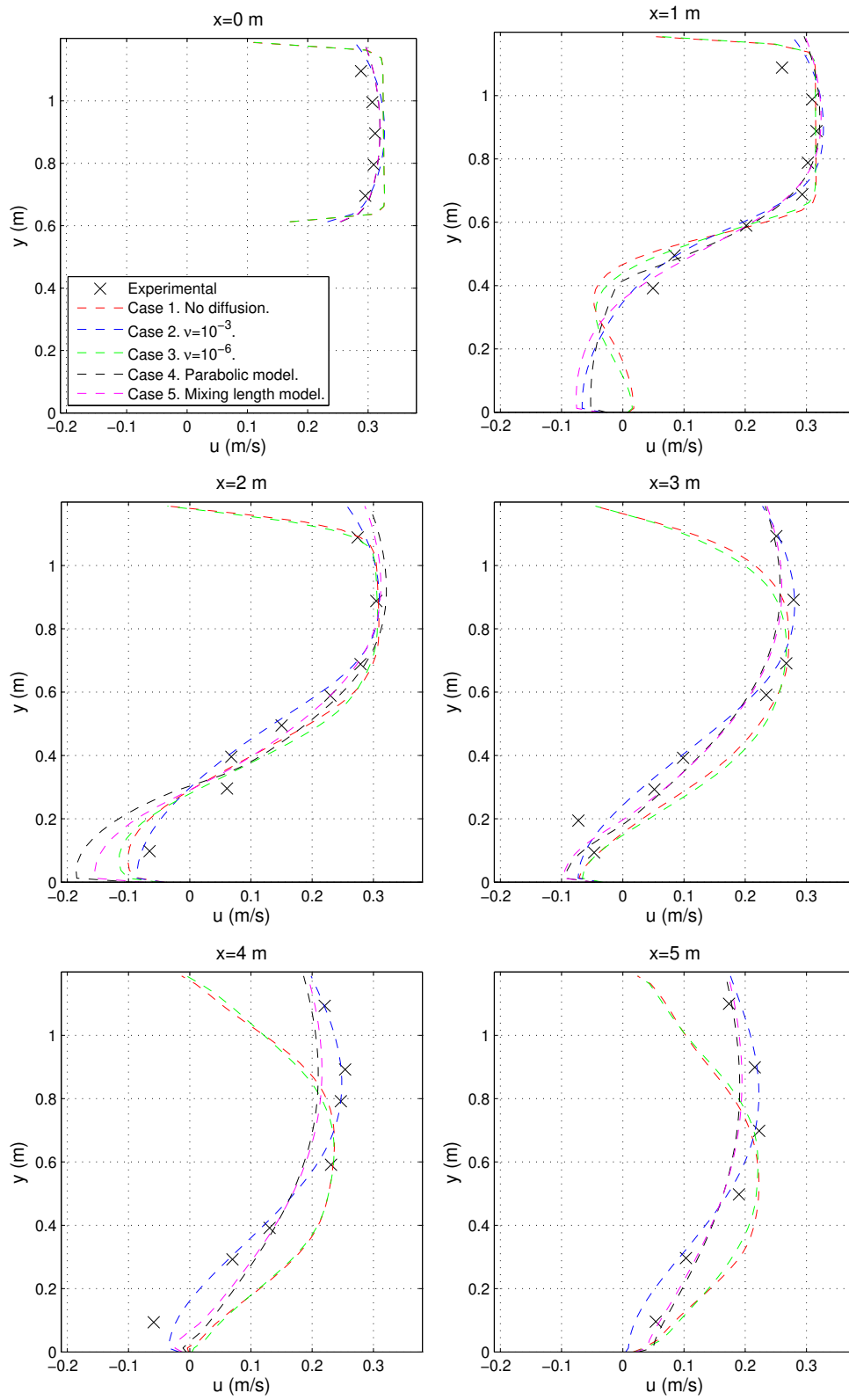


Figura 5.12: Perfiles de velocidad de cinco configuraciones distintas de turbulencia. Esquema numérico de orden 3 con $\Delta x = 0,025$ m.

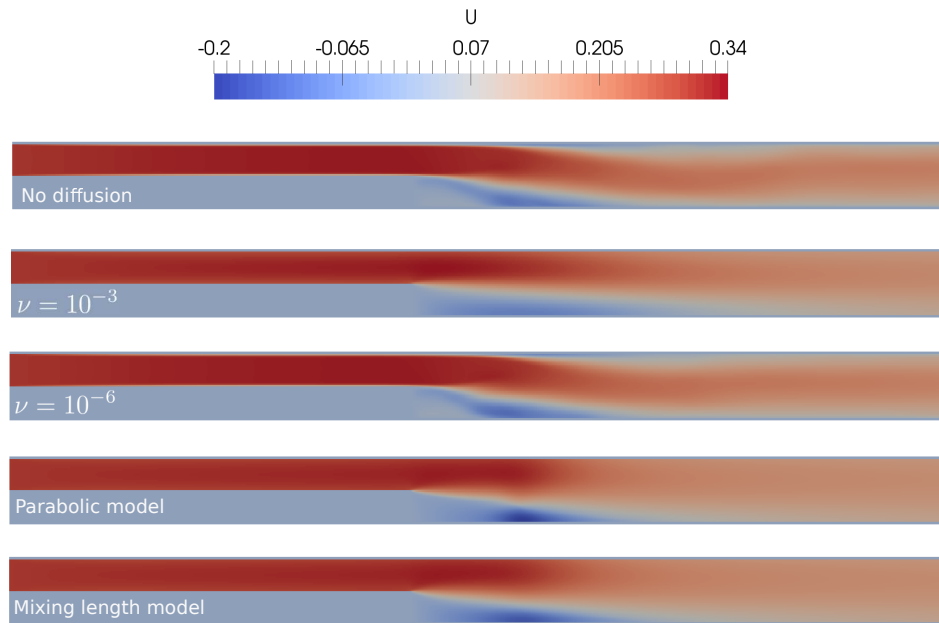


Figura 5.13: Representaciones de la velocidad horizontal promediada en el tiempo para 5 configuraciones distintas de turbulencia. Sin difusión, $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$, $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$, modelo de viscosidad parabólico y modelo de longitud de mezcla.

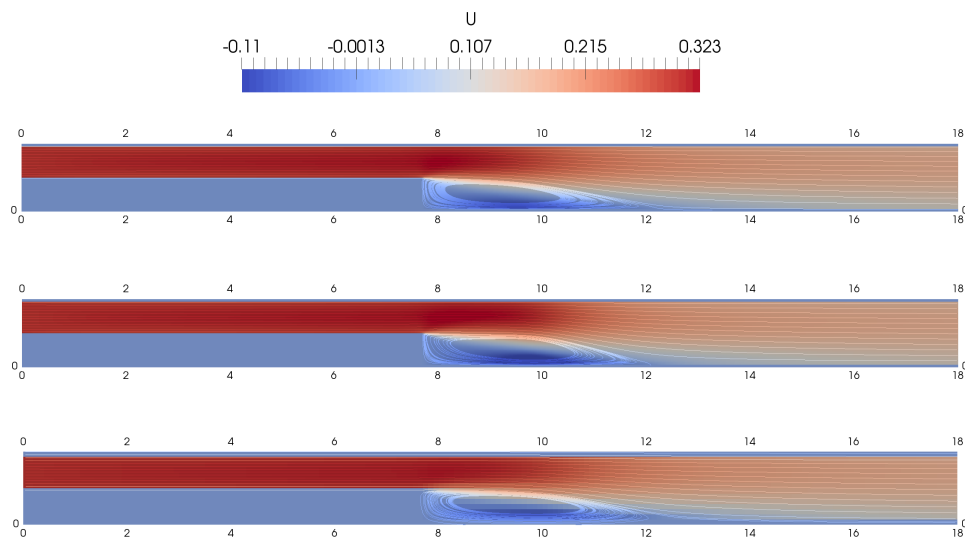


Figura 5.14: Representaciones de la velocidad horizontal para tres configuraciones diferentes. De arriba abajo, esquema numérico de primer orden con $\Delta x = 0,025 \text{ m}$, esquema numérico de tercer orden con $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ y esquema numérico de tercer orden con $\Delta x = 0,1 \text{ m}$.

5.5. Test 5: Simulación de un canal en T

En esta sección, se considera un caso de mayor complejidad que el anterior ya que incluye la presencia de una confluencia de canales en forma de T. La explicación de la geometría y los datos experimentales se encuentra en la Sección 4.2. Existen velocidades experimentales medidas en las siguientes secciones transversales $x = -1,83, -1,037, -0,6344, -0,488, -0,1769, -0,0244, 0,1342$ y $0,5917$ m e $y = -1,525, -0,9882, -0,7625, -0,4453$ y $-0,1769$ m. Se puede observar la Figura E.1 para situar cada sección. El objetivo es la comparación de las velocidades promediadas en la vertical (ver Sección D.2.3).

La configuración de las simulaciones se detalla a continuación. Se aplican tres condiciones de contorno. Aguas arriba en el canal principal se impone un caudal constante $Q_u = 0,046 \frac{m^3}{s}$ a lo largo de la sección de entrada, aguas abajo del canal principal se impone un caudal constante $Q_d = 0,027 \frac{m^3}{s}$ y aguas abajo del canal ramificado se impone otro caudal $Q_b = 0,019 \frac{m^3}{s}$. Como condiciones iniciales, se imponen caudales unitarios en cada celda desde la entrada y las salidas hasta la entrada del canal ramificado, como se muestra en la Figura 5.15. Además, se aplica un calado inicial $h = 0,14213$ m en todo el dominio computacional $\Omega = [0,6.1915] \times [0,3.477]$ con $\Delta x = 0,0305$ m. Se observa mediante sondas que las variables toman valores estables a partir de $t = 275$ s.

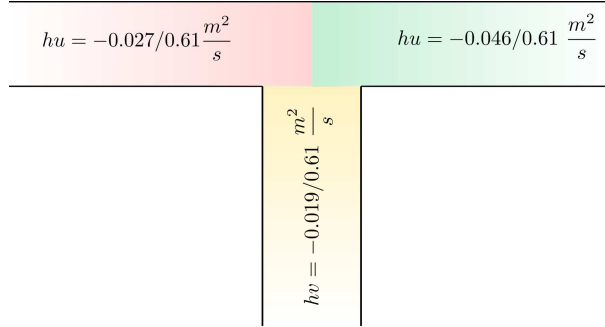


Figura 5.15: Representación de las condiciones iniciales de caudales unitarios.

Es necesario ajustar los parámetros de simulaciones para cada caso nuevo. Las constantes que no dependen de la calibración se sustituyen como sigue

$$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad g = 9,81 \frac{m}{s^2}. \quad (5.33)$$

En primer lugar, se propone un bucle para averiguar los valores óptimos de λ y β . Dicho bucle consiste en calcular λ siguiendo una función definida por partes a lo largo de la simulación mediante la expresión

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } t < 400 \\ 0,1 + \frac{1,8}{500} (t - 400) & \text{si } 400 \leq t \leq 1600 \end{cases}, \quad (5.34)$$

para cada paso de tiempo. Este bucle se repite para valores de $\beta = 0, 2, 4, 8$ y 12 . Para comparar qué configuración resulta más óptima, se definen los siguientes errores.

$$Err_j = \sqrt{\frac{\sum (u_i^{sim} - u_i^{exp})^2}{\sum (u_i^{exp})^2}}, \quad (5.35)$$

$$Err_n = \sqrt{\frac{\sum (v_i^{sim} - v_i^{exp})^2}{\sum (v_i^{exp})^2}}, \quad (5.36)$$

donde los superíndices *sim* and *exp* indican resultados numéricos y experimentales respectivamente y Err_j, Err_n indican el error de cada perfil de las velocidades u y v . Hay tantos términos dentro de los sumatorios en (5.35) y (5.36) como valores experimentales de velocidad hay para una sección determinada.

Cabe destacar que las posiciones de y para las que hay datos experimentales no coinciden necesariamente con las coordenadas de los centros de las celdas de la malla computacional. Por tanto, se usa el valor numérico de velocidad más cercano a la coordenada y , o x (dependiendo de la sección de estudio) experimental para calcular el error en la sección.

El error total en u , teniendo en cuenta los ocho perfiles correspondientes a las secciones en $x = -1,83, -1,037, -0,6344, -0,488, -0,1769, -0,0244, 0,1342$ and $0,5917$ m , se calcula como

$$Err_{mean,u} = \frac{\sum_{j=1}^8 Err_j}{8} . \quad (5.37)$$

Análogamente, el error total en v , teniendo en cuenta los cinco perfiles correspondientes a las secciones en $y = -1,525, -0,9882, -0,7625, -0,4453$ and $-0,1769$ m , se calcula como

$$Err_{mean,v} = \frac{\sum_{n=1}^5 Err_n}{5} . \quad (5.38)$$

Se considera un error absoluto para las comparaciones que se llevan a cabo para diferentes mallas. Aquí definido como

$$Err_{overall} = \frac{\sum_{j=1}^8 Err_j + \sum_{n=1}^5 Err_n}{13} . \quad (5.39)$$

Se representan las gráficas de los errores (5.37) y (5.38) frente a λ para los distintos valores de β en la Figura C.39. Se concluye que los valores óptimos de estos dos parámetros son $\lambda = 0,25$ y $\beta = 8$. La Figura 5.16 muestra aquí por conveniencia el aspecto del gráfico resultante de un bucle, donde se observa un valor mínimo. Estos bucles se simulan con el esquema numérico de orden 1 y un tamaño de celda $\Delta x = 0,0305$ m . Un script de Matlab utilizado para el cálculo de los errores se muestra en el Apéndice C.4.

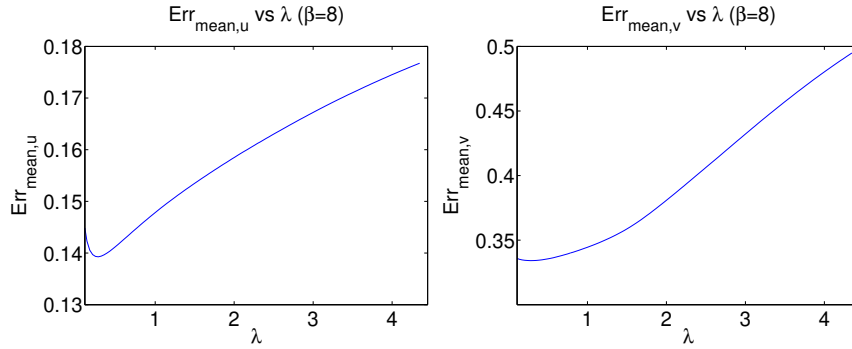


Figura 5.16: Gráficos correspondientes a los errores promedio en u and v vs λ para $\beta = 8$. Esquema numérico de orden 1.

Análogamente al estudio de λ , se ha programado otro bucle para calibrar el coeficiente de rozamiento con el fondo, n_b . En este caso, n_w permanece como $0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$. Dicho bucle consiste en calcular n_b siguiendo una función definida por partes a lo largo del tiempo de simulación mediante la expresión

$$n_b(t) = \begin{cases} 0,008 & \text{si } t < 400 \\ 0,008 + \frac{0,012}{1200} (t - 400) & \text{si } 400 \leq t \leq 1600 \end{cases} . \quad (5.40)$$

Representaciones de los errores (5.37) y (5.38) frente a n_b se presentan en la Figura C.40, donde se observan valores mínimos para $n_b \approx 0,017 \frac{s}{m^{1/3}}$.

Es de interés estudiar la sensibilidad del error con el refinamiento de malla. Para ello, se simulan tres casos con valores $\Delta x = 0,0305, 0,01525$ y $0,007625$ m . Los perfiles de velocidad resultantes se presentan en las Figuras 5.17 y 5.18 para las velocidades v en el canal ramificado y para u en el canal principal. En

promedio, $Err_{mean,u}$ y $Err_{mean,v}$ muestran valores alrededor de 0,13 y 0,32 respectivamente. Dada la pequeña alteración de los resultados para distintos refinamientos de malla, como se puede ver en la Tabla C.5, se considera que un ancho de celda $\Delta x = 0,01525 \text{ m}$ proporciona el mejor equilibrio entre error y tiempo de cálculo, para la calibración actual.

Es importante mencionar que durante el proceso de promediado en la vertical de los datos experimentales, explicado en la Subsección D.2.3, no se incluyen velocidades nulas en el fondo. Por tanto, las velocidades promedio pueden estar sobreestimadas alrededor de un 4,5 %, como se ve en los resultados de una comparación llevada a cabo en la Sección D.3. Probablemente, si el proceso de promediado incluyese la velocidad nula en el fondo, el error promedio disminuiría.

En la Figura 5.19 se muestra una comparación de la magnitud de la velocidad experimental y numérica con una configuración $\lambda = 0,25$, $\beta = 8$, $\Delta x = 0,007625 \text{ m}$, $n_b = 0,013 \frac{s}{m^{1/3}}$ y $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$. Se observa que las velocidades producidas por la simulación son algo superiores a las experimentales en la zona donde el flujo se contrae para pasar por la ramificación. Esto ocurre porque el ancho de la zona de recirculación está ligeramente sobreestimada por la simulación. Además, los vectores de velocidad se muestran también en la misma Figura. Al observar la dirección de los vectores en la entrada del canal, estos apuntan a la derecha en el caso experimental y a la izquierda en los resultados de la simulación. Dicha característica se podría observar si se comparase la velocidad transversal en la entrada de la ramificación, donde se mostraría que en el caso experimental tienen signo opuesto a los resultados de la simulación. Adicionalmente, el punto de estancamiento, que no se apreciaba con claridad con datos experimentales debido a la resolución, ahora se observa bien en la Figura 5.19 derecha.

Otra imagen similar se muestra en la Figura 5.20 comparando el calado para la misma configuración que en el párrafo anterior. Cualitativamente, el calado sigue una tendencia ascendente, a medida que nos fijamos en la ramificación, en el canal principal aguas arriba y después aguas abajo del canal principal. No obstante, los calados experimentales son mayores en general en 1 cm. Además, simulaciones adicionales muestran una fuerte relación del calado resultante con el calado impuesto como condición inicial, lo que dificulta la calibración del caso.

Finalmente, para los errores definidos, se ha alcanzado un mínimo de error medio del 20,6 %. En el caso de la expansión repentina es de un 12,6 %. Si se quisiese disminuir el error de este caso, una opción sería realizar bucles fijando un valor de λ óptimo y variando el valor de β . Análogamente se haría lo mismo fijando una configuración de valores óptima hasta el momento y se observaría cómo varía el error medio a medida que el coeficiente de rozamiento con la pared, n_w , varía. En todos los casos se seleccionaría el valor de la variable que esté cercano al mínimo del gráfico resultante del error. Otra alternativa sería definir el error de una forma distinta, ya fuese teniendo en cuenta la anchura de recirculación, incluyendo las velocidades transversales o incluyendo todas las velocidades transversales y paralelas, por ejemplo. Además, habría que explorar diversas maneras más sofisticadas de imponer las condiciones de contorno.

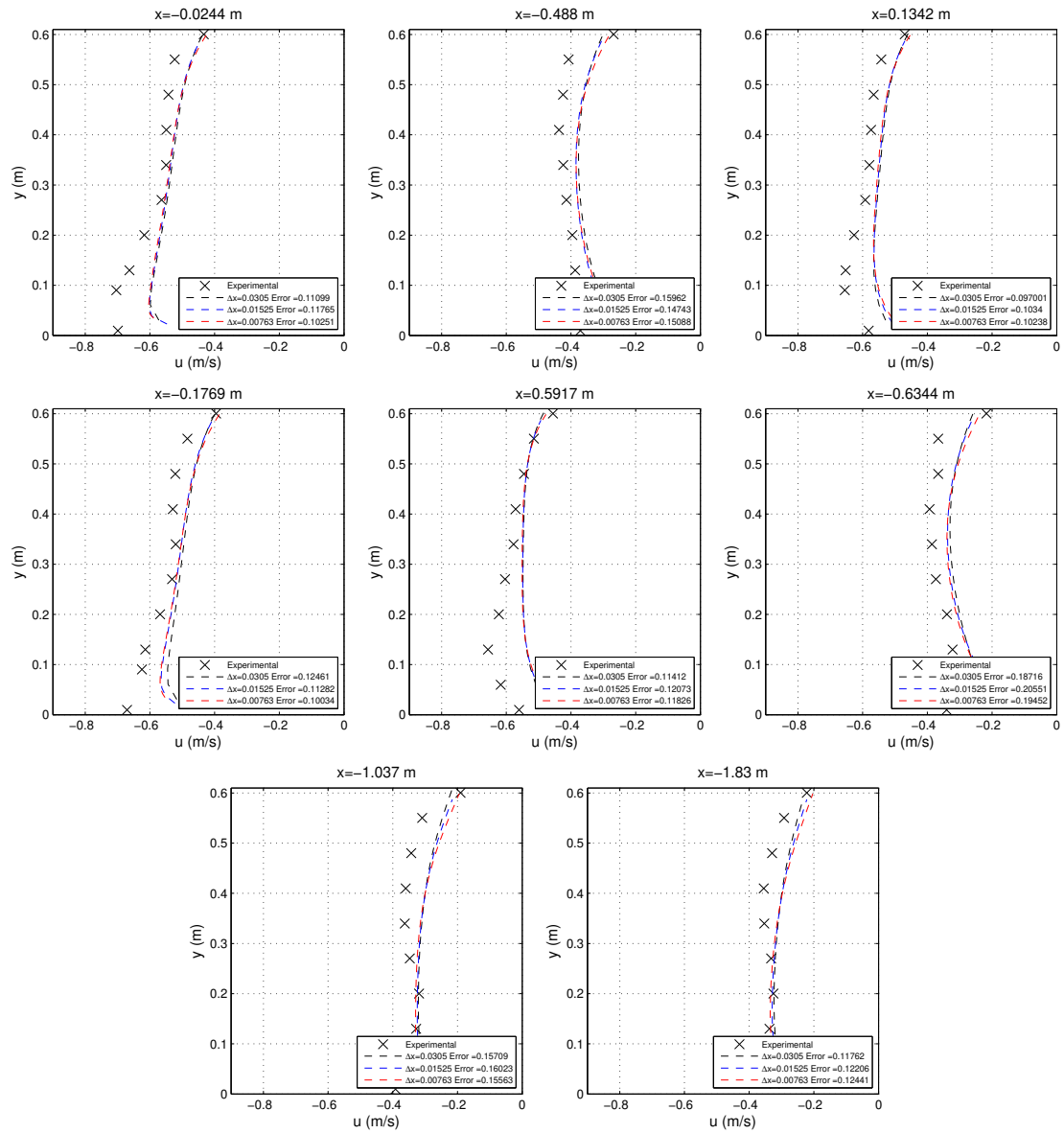


Figura 5.17: Comparativas de tres refinamientos de malla distintos que muestran Err_j para las secciones transversales de 8 coordenadas x . $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Simulaciones con esquema numérico de primer orden.

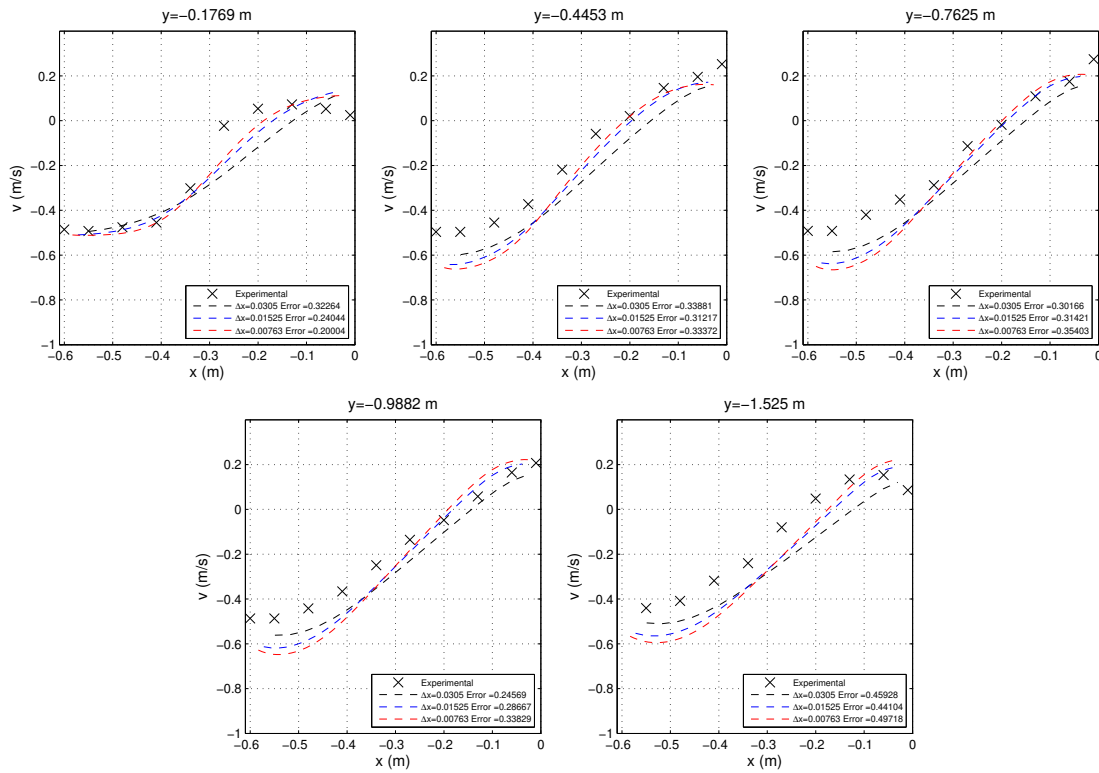


Figura 5.18: Comparativas de tres refinamientos de malla distintos que muestran Err_n para las secciones transversales de 5 coordenadas y . $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Simulaciones con esquema numérico de primer orden.

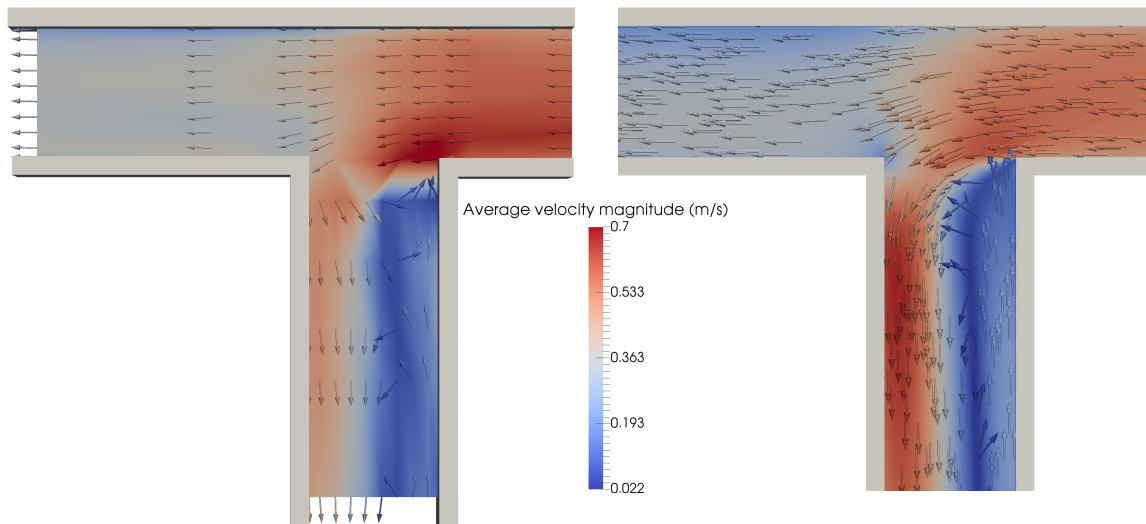


Figura 5.19: Izquierda: Campo de magnitud de velocidad horizontal 2D tras haber promediado las velocidades experimentales en la vertical. Derecha: Campo de magnitud de velocidad horizontal producido por la simulación de esquema numérico de primer orden con $\lambda = 0,25$, $\beta = 8$ y $\Delta x = 0,007625$ m. Ambas imágenes corresponden a la misma escala de colores representada.

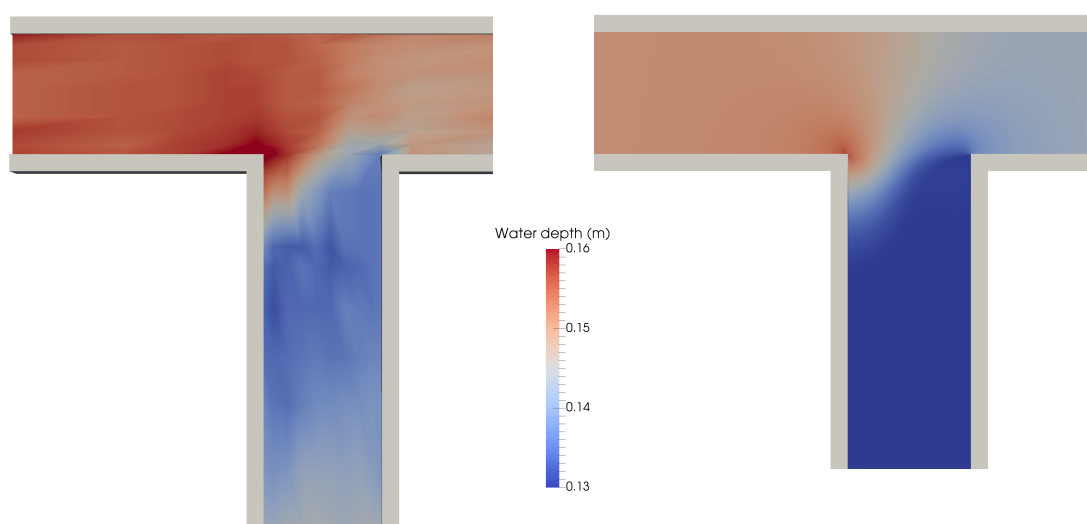


Figura 5.20: Izquierda: Calado experimental. Derecha: Calado en la simulación. Esquema numérico de orden 1 con $\lambda = 0,25$ y $\beta = 8$. Ambas imágenes corresponden a la misma escala de colores representada.

Capítulo 6

Conclusiones

La finalidad de este trabajo de fin de grado ha sido el estudio, implementación y validación de distintos modelos de turbulencia con aplicación a flujos de lámina libre. El trabajo se enmarca en un proyecto de investigación para el desarrollo de herramientas computacionales avanzadas para la simulación de flujos de aguas poco profundas. Como resultado, se dota al código original de simulación de nuevas subrutinas de cálculo para la simulación de flujos turbulentos, incluyendo la difusión física inherente a estos. Una de las contribuciones principales de este trabajo ha sido la implementación y validación de un método numérico para la aproximación de los términos difusivos que modelan los esfuerzos turbulentos en las SWE. Estos términos resultan de la aproximación RANS sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. La discretización propuesta del método numérico ha sido de orden 2.

Por otro lado, en este trabajo se ha tratado paralelamente el análisis de datos experimentales para una posterior validación de los métodos numéricos. Esto ha conllevado la programación de códigos de Matlab y el uso de varios programas con el fin de tener la información adecuada (campos de velocidades y calados) de forma ordenada para facilitar su posterior comparación con los resultados de las simulaciones. Durante la validación, se han realizado análisis de convergencia y de sensibilidad sobre casos analíticos y experimentales. En dichos análisis se ha observado la influencia de parámetros de fricción, de control de turbulencia con varios modelos, del orden del esquema numérico utilizado, del refinamiento de malla y del solver de Riemann utilizado.

En este trabajo se considera la aproximación de Boussinesq para modelizar los esfuerzos turbulentos. Dicha aproximación requiere del cálculo de derivadas cruzadas, lo cual puede resultar costoso en el caso de usar mallas no estructuradas. Existe una alternativa más barata computacionalmente que se deriva como una simplificación de la aproximación de Boussinesq. Se ha comparado la aproximación original de Boussinesq con dicha simplificación de la misma, que reduce el coste computacional al no considerar derivadas cruzadas. Pese a que no se observan diferencias, ya que las variaciones de calado son pequeñas, se escoge la aproximación de Boussinesq original por ser más genérica. La simplificación no representaría correctamente los fenómenos producidos por situaciones transitorias de fuertes variaciones en el calado.

Los modelos de turbulencia para la viscosidad de remolino, ν_e , que se han considerado son algebraicos, sin añadir más ecuaciones al sistema original. Uno de ellos es el modelo parabólico promediado en la vertical, el cual se ha visto que sobreestima las velocidades en zonas de recirculación de flujo, incluso para configuraciones óptimas del parámetro con el que se ha controlado la intensidad de la turbulencia que aporta. Otro modelo usado es el de longitud de mezcla promediado en la vertical, el cual contempla la turbulencia generada por el fondo y por los gradientes horizontales. Se ha observado que este último permite obtener aproximaciones más fieles a la realidad, reduciendo las velocidades máximas en las recirculaciones. Cabe destacar que, a diferencia del modelo parabólico, el modelo de longitud de mezcla consta de dos parámetros de calibración. Por otro lado, también se ha observado que es necesario controlar la intensidad de la turbulencia en las celdas contiguas a contornos sólidos, ya que este modelo tiende a sobreestimarla en dichas situaciones.

Una parte importante del método numérico del código original contempla la solución aproximada de los flujos en las paredes de las celdas mediante el uso de Riemann solvers. Tras realizar comparaciones sobre los dos solvers disponibles (HLLS y ARoe) se llega a la conclusión de que el solver de Riemann

ARoe introduce mucha menor difusión numérica per se que el HLLS. Es por esto que el solver ARoe resulta adecuado para proporcionar soluciones más fieles a las ecuaciones. Incluso en situaciones donde la turbulencia genera una elevada difusión, es más conveniente utilizar un Riemann solver poco difusivo (más preciso) y aportar la difusión extra requerida a través del modelo de turbulencia.

El código original incluía algoritmos de orden arbitrario para la simulación de los términos convectivos. Al comparar los resultados, se ha observado que el uso de esquemas numéricos de alto orden proporciona una mayor eficiencia computacional, es decir, para conseguir un mismo nivel de error, un esquema de menor orden necesita una malla más fina y un mayor tiempo computacional. Sin embargo, es posible que el orden de convergencia a algunas soluciones analíticas puede ser inferior al orden del esquema numérico utilizado, dependiendo de las condiciones de contorno.

Respecto a las ideas de trabajo futuro, se proponen las siguientes:

- Dado que el código original contiene esquemas numéricos de orden arbitrario, se podría avanzar hacia una discretización de mayor orden de las derivadas espaciales de los términos de difusión turbulenta, habilitando la posibilidad de reducir el error aportado por una discretización de menor orden que la parte convectiva de las ecuaciones.
- En el caso del canal en T, se podrían recalcular las velocidades promediadas en la vertical, pero teniendo en cuenta una velocidad nula en el fondo del canal. En casos puntuales se ha comprobado que las velocidades 2D calculadas del campo experimental de velocidades cambiarían al menos un 4,5 % (Ver Sección D.3). Si se tiene en cuenta la velocidad nula en el fondo, se reducirían las velocidades de forma general y se podría comprobar si se reduce el error relativo al comparar con los resultados de la simulación. Además, podría realizarse el cálculo de las velocidades promedio en la vertical con distintas fórmulas de cuadratura además de la regla del trapecio compuesta aquí utilizada. Esto podría proporcionar velocidades promedio más fieles a la definición del promedio de las velocidades.
- Sería necesario hacer un estudio más exhaustivo de sensibilidad de la solución del caso del canal en T ante variaciones de las condiciones de contorno e iniciales. El inconveniente aquí es que los calados experimentales disponibles corresponden a secciones alejadas de los aliviaderos. Por tanto, se saben los caudales en la entrada y en las salidas, pero no los calados. En simulaciones adicionales se ha visto que el calado en situación estacionaria es dependiente de la condición inicial del mismo. Si se definiesen errores que tuviesen en cuenta los calados, se podría obtener otra medida de error distinta que la actual, en la que solo se han incluido errores en las velocidades.
- En este trabajo, al considerar la aproximación de Boussinesq, se han omitido los términos de energía cinética turbulenta debido a que los modelos algebraicos de turbulencia usados no la contemplan. Podría estudiarse la implementación de un modelo $k-\epsilon$, o de dos ecuaciones, que la tuviese en cuenta, completando de esta manera la modelización de la aproximación de Boussinesq en su totalidad. Este modelo calcula la viscosidad de remolino, ν_e , teniendo en cuenta la energía cinética turbulenta, k , y la tasa de disipación de la misma, ϵ . Estas son dos variables gobernadas por dos ecuaciones de transporte adicionales (EDP).
- En el futuro, también se pretende aplicar estos métodos para la simulación de fenómenos transitorios que incluyan la interacción de vórtices con fenómenos de propagación de onda más complejos.
- El proceso de calibración es fundamental y es necesario investigar en formas más eficaces y eficientes de calibrar modelos de turbulencia, avanzando hacia una mayor automatización del proceso de ajuste de parámetros.

Apéndice

Apéndice A

Shallow water flows

A.1. Introduction to shallow water flows and turbulence

A free surface flow can be considered to be a shallow water flow when its water depth h , represented in Figure A.1, is much lower than the horizontal dimensions of the flow. Besides, if the spatial variations of h are small, the vertical acceleration is also small. These flows are almost two-dimensional, which allows to simplify their mathematical formulation, assuming a hidrostatic pressure distribution [20]. These type of flow can be observed in rivers, channels, coasts or estuaries.

In Figure A.1, example situations of an artificial channel and a natural basin with an irregular geometry are depicted.

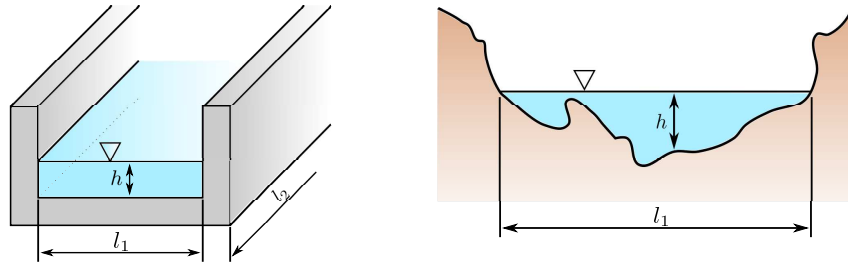


Figure A.1: Shallow water flow examples. Left: Artificial open channel flow. Right: Naturally-made zone. The water depth is represented by h , l_1 is the perpendicular length to the flow (or width) and l_2 is the longitudinal dimension in the direction of the flow.

These shallow water flows are frequent in the nature and they are also present in several industrial applications. Therefore, a study of them in order to develop mathematical models that can reproduce reality with precision are worth it, moving forward to a better understanding of fluid mechanics. These models allow the possibility of using simulation tools that allow to foresee the effects of natural phenomena, like tsunamis, wave motion, river floodings and other engineering applications.

It is worth mentioning that in these flows a phenomena known as turbulence is frequently observed. One of the 1st persons in study turbulence was Leonardo da Vinci, as shown in his Codex Atlanticus from s.XVI. It is complex to give a simple definition of what turbulence is, instead, the next features, approaches to turbulence and parameters that enhance turbulence are going to be enumerated [1, 2, 4].

Irregularity. A turbulent flow is irregular, random and chaotic. That is to say, it has an erratic and unpredictable behaviour, being very sensitive to the initial conditions. This dependency of the initial conditions allows to consider turbulence as deterministic, being described by the Navier-Stokes equations.

Diffusivity. The diffusivity that characterizes turbulence causes high rates of momentum exchange ($\mathbf{p} = \int_V \mathbf{v} \rho dv$), heat and mass. This is due to the homogenization produced by the fast mix of the particles that has place when there is turbulence. This homogeneization is much more effective in a

turbulent flow than in a laminar flow.

High Reynolds number. The number of Reynolds (Re) is a dimensionless number that relates inertial forces and viscous forces within a flow and allows to foresee how organized or how unorganized the mentioned flow is. This idea was introduced by G.G. Stokes, when studying the effects of intern friction in flows in [5], but later popularized by O. Reynolds in his papers of 1883 [6] and 1895 [9], where his famous experiment is detailed. This experiment consisted of observing the developing of vortexes (turbulence) as the flow rate within a pipe is increased. Ink was used to observe pathlines followed by fluid particles in order to observe how irregular their movement turns as flow rate increases.

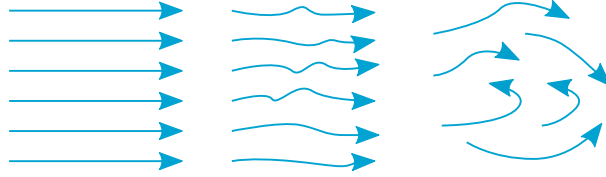


Figura A.2: Left: Laminar flow. Center: Transition flow. Right: Turbulent flow.

For any fluid in movement, 3 different situations can be noticed as the Reynolds number is increased:

- The trajectory of fluid particles is paralell and organized (laminar flow in Figure A.2).
- Undulations in the trajectory of fluid particles start to appear (transition flow in Figure A.2). This situation occurs for a range of Re depending on the experimental details.
- The trajectory of fluid particles is unorganized and chaotic (Turbulent flow in Figure A.2). There is always turbulence in this situation and therefore the movement turns random and chaotic, with fast spatial and temporal changes of fluid magnitudes [10].

Three-dimensional fluctuations of vorticity. Turbulence is three-dimensional and rotational. That is to say, it can be observed in vortexes that fluctuate in different length and time scales [12]. An important mechanism of vortex maintenance known as vortex stretching has no place in two-dimensional flows [2], which is the main reason why turbulence is said to be 3-dimensional.

Dissipation. A turbulent flow is always dissipative. The viscous shear stresses carry out a deformation work that increases the internal energy of the fluid thanks to the kinetic energy.

The kinetic energy that the small vortexes receive from larger vortexes, which in turn they receive from larger vortexes, is turn into internal energy when the smaller scales are reached (also called Kolmogorov scales [12]). Initially, the kinetic energy that the larger vortexes have is extracted from the mean flow. This process of energy transfer from larger scales o smaller scales is called direct-cascade process. When the energy transfer happens from small scales to larger ones then it is called inverse-cascade process, which only occurs in turbulence mainly two-dimensional.

In Figure A.3 the 2D and 3D energy cascades are depicted. In the 3D energy cascade can be seen that the kinetic energy is transferred from large vortexes to smaller ones until this energy is dissipated in heat when it reaches Kolmogorov scales. κ_L , defined as the inverse of the length scale L of the large vortexes corresponds to the peak of the spectrum. κ_κ corresponds to the wave number of the Kolmogorov scales, where the viscous dissipation occurs [13]. In the 2D energy cascade [15] exists a wave number, κ_F , from which can happen two things. Either a filamentation of the large vortexes occur until reaching Kolmogorov scales (direct cascade) or these vortexes with wave number κ_F (or lower) can absorb each other to create larger scale vortexes (inverse cascade). This last ones dissipate energy by friction again. This phenomena of absorption between different scales vortexes was described in 1921 [26] and was observed when the storms "Alpha" and "Wilma" or "Hilary" and "Irwin" merged in 2005 and 2017 respectively. It has also been noticed in a major scaler in Jupiter, where two huge vortexes merged in 2000 [14]. Due to its characteristics as a planet (Jupiter spins twice as fast as the earth, has no defined land..) is the example of direct and inverse energy cascade phenomena [18].

Continuum. The small scales in which the kinetic energy is dissipated in heat are still larger than

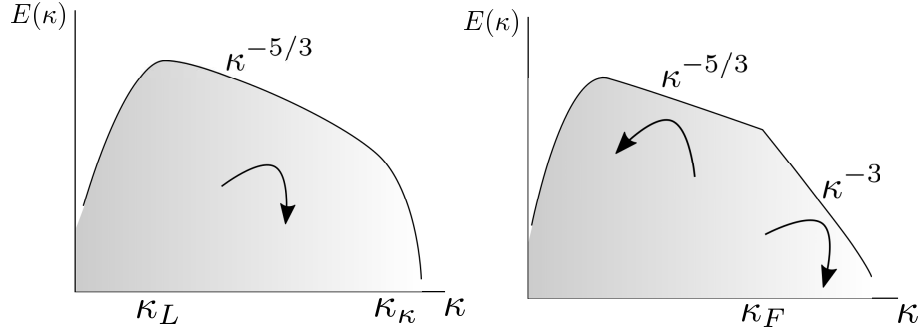


Figura A.3: Left: 3D energy cascade. Right: 2D energy cascade. The axis are in logarithmic scale in both cascades. $E(\kappa_L)$ represents the spectral density of energy [12] of the wave number $\kappa_L = \frac{1}{L}$. It is worth mentioning that the spectral density $E(\kappa)$ is low for very large or very small scales. It means that vortexes of the same scale than the flow dimensions will have almost no place. The same happens to those vortexes with a wave number of the order of molecular scales.

molecular scales. However, the common hypothesis in fluid mechanics of considering a fluid volume as a continuum is applied.

A.2. Shallow Water Equations

The shallow water equations (SWE) are a system of hyperbolic partial derivative equations [16] that describe free surface flow problems in which the vertical dynamics can be neglected. They are the basis of a model used to obtain numerical results in an affordable computational time. Their derivation will be briefly introduced in this section, stating the hypotheses to have in count, because it's the basis of a script that will be used to carry out the numerical simulations presented in this project.

The derivation of the SWE can be started from the mass and momentum conservation equations, which are respectively and using index notation as follows

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad (\text{A.2})$$

where $u_i (i = 1, 2, 3)$ are the velocity components, τ_{ij} is the viscous stress tensor, which in the case of a newtonian and incompressible fluid is

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{A.3})$$

p is the pressure and F_i is the external volumetric forces vector (gravity, Coriolis effect...). Equation (A.1) is valid for the hypothesis of incompressible fluid. The derivation of these equations can be consulted in [19].

It is worth mentioning that due to the order of the length scales confining some shallow water flows plus the low values of viscosity of the commonly used fluids enhance turbulent motion, which makes parameters as velocity fluctuate in time and space (see example in Figure A.4). Therefore, it is assumed that the value of a parameter, x component of velocity for example, in a given instant will be expressed as

$$u = \bar{u} + u', \quad (\text{A.4})$$

where \bar{u} represents the mean temporal value of the variable and u' is the fluctuation due to irregularity of turbulence [9]. This separation of instant values in a mean value plus a fluctuation is called Reynolds

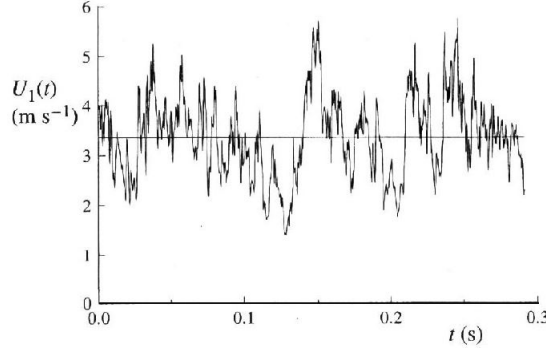


Figura A.4: Plot of the axial component of velocity, measured in a point from the centerline of a turbulent jet vs time. Obtained from [21].

decomposition. If this approach is substituted in the aforementioned equations, RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes) equations are obtained and stresses like

$$\overline{u'_i u'_j} , \quad (\text{A.5})$$

appear. They are called Reynolds stresses. These terms account for the exchange of momentum between the fluid elements due to turbulence [20]. They are unknown. Consequently, empirical methods or models are to be used in order to analyze them, like the Boussinesq assumption, which relates Reynolds stresses to the mean strain tensor

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij} , \quad (\text{A.6})$$

where $u'_i (i = 1, 2, 3)$ is the velocity fluctuation, K is the kinetic turbulent energy $K = \frac{\overline{u'_k u'_k}}{2}$ (neglected in zero-equation turbulence models [17]), δ_{ij} is the kronecker delta and ν_e is the eddy viscosity considered as

$$\nu_e = \nu + \nu_t , \quad (\text{A.7})$$

where ν is the fluid kinematic viscosity and ν_t is the turbulent viscosity. This last one is modelled by using the mixing length model [22, 23] or the Smagorinsky model [13].

By substituting the temporal mean values and the fluctuations in equations (A.1),(A.2) it yields

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 , \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] + F_i , \quad (\text{A.9})$$

which are the RANS.

Obtaining a hydrostatic pressure distribution is one of the central points of the SWE. For which the scales of each term from RANS is to be analysed in the z direction [25].

$$\frac{\partial \overline{u} \overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w} \overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} - g . \quad (\text{A.10})$$

To distinguish the dominant terms in equation (A.10), the next assumptions are to be considered:

- Horizontal Re values are much larger than 1.

- Turbulent intensity, defined as $\frac{\sqrt{u_i'^2}}{u_i}$ is much smaller than 1.
- Horizontal length scales are much larger than vertical length scales.

Which carries the derivation to neglect all terms in equation (A.10) except

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g . \quad (\text{A.11})$$

Obtaining a hydrostatic pressure distribution

$$\int_{p(z)}^{p(h+z_b)} dp = -\rho g \int_z^{h+z_b} dz \implies p(z) = \rho g(h + z_b - z) + p_a , \quad (\text{A.12})$$

being $p(h + z_b)$ the pressure at the surface (atmospheric pressure p_a), h the water depth, z_b the bed height and z the vertical coordinate respect to a reference height (see Figure A.5). Constant density in z is assumed.

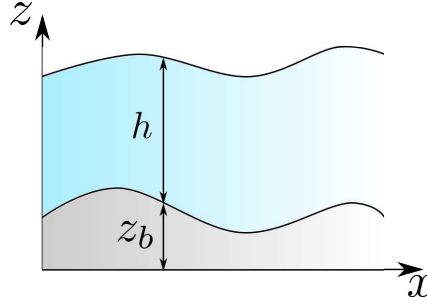


Figura A.5: Cross-section of a given profile showing parameters h , z_b y z . Being them the water depth, the bed height and the vertical coordinate respectively.

Hence, the SWE 3D are obtained. Equation (A.8) and

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -g \frac{\partial (h + z_b)}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} , \quad (\text{A.13})$$

with $i = 1, 2$.

An depth-average is carried out in equation (A.8) now

$$\int_{z_b}^{h+z_b} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} dz = 0 . \quad (\text{A.14})$$

If Leibniz integral rule and the boundary conditions of bed with impermeability and nil normal velocity to the free surface [25] are applied, the mass conservation equation of SWE is obtained.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h u_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (\text{A.15})$$

with $i = 1, 2$, where now u and v account for the depth-averaged velocity value in x and y directions.

A similar process is carried over equation (A.13) [25], considering:

- Coriolis effect is neglected (small scales).
- Shear stress due to wind at the free surface is neglected.

- Atmospheric pressure is assumed constant over the domain.
- Reynolds stresses are modeled through Boussinesq assumption.

Obtaining the vectorial form of SWE, which is a system of non-linear partial derivative equations.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_z + \mathbf{S}_f + \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y , \quad (\text{A.16})$$

where \mathbf{S}_z and \mathbf{S}_f are the source terms accounting for the bed slope and friction

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{w,x}}{\rho} - \frac{\tau_{b,x}}{\rho} \\ -\frac{\tau_{w,y}}{\rho} - \frac{\tau_{b,y}}{\rho} \end{pmatrix} . \quad (\text{A.17})$$

There are two options to compute \mathbf{S}_f depending on the approximation of the wall friction.

- Option 1: Estimation of the wall friction using the law of the wall.

Wall friction is represented by $\tau_{w,i}$ following the law of the wall [25]

$$\frac{\tau_{w,i}}{\rho} = u_*^2 , \quad (\text{A.18})$$

where u_* is the friction velocity, obtained following an iterative process

$$u_t = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{yu_* E}{\nu} \right) . \quad (\text{A.19})$$

where u_* starts being 0.025, u_t is the velocity component parallel to the wall in a computational cell next to it, κ is the Von Karman's constant (≈ 0.41) and E is a roughness parameter. For smooth walls $E = 9$ [25].

Rearranging (A.19) and having into account the temporal step appointed in the superscripts, we have

$$(u_*^2)^{n+1} = u_t^n u_*^n \kappa \frac{1}{\ln \left(\frac{yu_*^n E}{\nu} \right)} . \quad (\text{A.20})$$

The friction with the bed [20] $\frac{\tau_{b,i}}{\rho}$ is calculated with the expression

$$\frac{\tau_{b,i}}{\rho} = c_f u_i |\mathbf{u}| , \quad (\text{A.21})$$

where c_f is the friction coefficient $c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}$, n is the Gauckler-Manning coefficient [27] and g is the acceleration of gravity.

- Option 2: Including the wall friction using a modified Manning coefficient n_{comp} .

In the following approach, a nil value of τ_w is set

$$-\frac{\tau_{w,x}}{\rho} = -\frac{\tau_{w,y}}{\rho} = 0 , \quad (\text{A.22})$$

and the wall friction is included in the bed friction term by means of using a modified Manning coefficient through the Horton-Einstein equation

$$n = n_{comp} = \left(\frac{n_b^{3/2} \Delta x + n_w^{3/2} h}{\Delta x} \right)^{2/3} , \quad (\text{A.23})$$

used when a cell of study adjoins a wall.

being $n_b, n_w \in \mathbb{R}^+$ constants that depend on the experimental details. But n_w can be thought of as a calibration parameter.

A comparison of both options to compute \mathbf{S}_f depending on the approximation on the wall friction is presented in Section C.3.

Finally, \mathbf{D}_x and \mathbf{D}_y are the turbulent diffusion vectors.

$$\mathbf{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xx} \\ hT_{yx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_y = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ hT_{xy} \\ hT_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

being T_{ij} the turbulent stresses, modeled through the Boussinesq assumption [17],

$$T_{xx} = 2\nu_e \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{A.25})$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (\text{A.26})$$

$$T_{yy} = 2\nu_e \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (\text{A.27})$$

Some considerations can be applied in order to achieve a simplified form of the turbulent diffusion terms. Let us consider $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y$ as one vector including both turbulent diffusion vectors in (A.24), read in index notation as

$$\mathbf{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right), \quad (\text{A.28})$$

If we now expand (A.28) we can rewrite it as follows

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + h\nu_e \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{A.29})$$

And by using the chain rule over the 1st term on the right side of the equality (A.29) it turns into

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (h\nu_e) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + h\nu_e \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{A.30})$$

The 1st term in (A.30) at the right side of the equality can be partially neglected by assuming small changes in water depth, but there is still $h \frac{\partial \nu_e}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ out from this term. The 2nd term on the right side of the equality in (A.30) can also be neglected by changing the derivative inside with $\frac{\partial}{\partial x_j}$ read as

$$h\nu_e \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = h\nu_e \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right), \quad (\text{A.31})$$

and therefore

$$h\nu_e \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = h\nu_e \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.32})$$

due to

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Let us now check what is left in (A.28) read

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) \approx h \frac{\partial \nu_e}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right). \quad (\text{A.34})$$

The 1st term on the right side of (A.34) can also be neglected because it is a product of derivatives. The order of this term is supposed to be smaller than the 2nd term on the right side of (A.34) if we consider smooth functions with small changes in infinitesimal distances. Thereupon, another way of computing \mathbf{D}_i is obtained [32]

$$\mathbf{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) . \quad (\text{A.35})$$

A comparison of both ways of computing the turbulent diffusion vector, (A.25) to (A.27) and (A.35), is presented in Section C.3.

Apéndice B

Numerical method to solve the SWE

B.1. Finite volume method: Godunov's method

A system of equations in partial derivatives is said to be hyperbolic if it is of the form

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{B} = 0, \quad (\text{B.1})$$

with $\mathbf{F} = \mathbf{F}(U)$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(U)$ and when rearranging like

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{B} = 0, \quad (\text{B.2})$$

being A, B the jacobian matrices of the fluxes, the resultant matrix of adding up $k_1 A + k_2 B$, with k_i a real number, has real eigenvalues and independent eigenvectors. This happens to the system (A.16).

A common way of calculating numerical results for hyperbolic conservation laws, such as the SWE, is to discretize the computational domain in cells where the original equations can be integrated, transforming the equations in an algebraic system. This algebraic system represents the discrete balance of the quantities on each cell. Mean values on each cell are obtained at the end of the process, representing an approximate solution to the original system. This way of obtaining numerical approximated results is called finite volume method [30].

The initial value and boundary problem that we have in (A.16) is the next

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PDEs: } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \\ \text{IC: } \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathring{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{BC: } \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_{\partial\Omega}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

with $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}^+$. The spatial domain is discretized in $N_x \times N_y$ cells within the domain, defined as $\Omega_{ij} \subseteq \Omega$, being the union of all cells the spatial domain Ω , with walls of cells defined as

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N_x - \frac{1}{2}} < x_{N_x + \frac{1}{2}} = b, \quad (\text{B.4})$$

and

$$c = y_{\frac{1}{2}} < y_{\frac{3}{2}} < \dots < y_{N_y - \frac{1}{2}} < y_{N_y + \frac{1}{2}} = d. \quad (\text{B.5})$$

Cells are defined as

$$\Omega_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y, \quad (\text{B.6})$$

and its size as

$$\vartheta_{ij} = (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot (y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y. \quad (\text{B.7})$$

For structured grids, $y = \frac{\Delta x}{2}$, being Δx the cell width. A computational grid is said to be structured if all cells have the same shape and size (see Figure B.1). If the structured grid is built of squared cells, then it is said to be a cartesian grid in which we have $\vartheta_{ij} = \Delta x^2$.

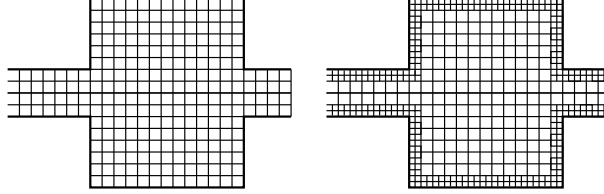


Figura B.1: Left: Example of a structured grid in which every cell has the same size and shape. Right: Example of a non-structured grid in which the cell size has been refined close to the walls. This is normally performed to impose the non-slip condition at the walls, making a smooth change of velocity when observing the profiles.

For each cell, at instant $t^n = \sum_{l=1}^n \Delta t_l$ with Δt_l as the time step. The time step has to satisfy the CFL stability condition [30] given for cartesian grids as

$$CFL + Pe \leq 0,5, \quad (\text{B.8})$$

being $CFL = \left| \frac{u \Delta t}{\Delta x} \right|$ and $Pe = \left| \frac{2\nu_e \Delta t}{\Delta x^2} \right|$, where u is the velocity of propagation of the fastest wave in the domain. For the simulations carried out in this project, a condition $CFL + Pe = 0,4$ is set up.

Conserved variables of vector \mathbf{U} are defined as mean values in cells as

$$\mathbf{U}_{ij}^n = \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^n) dV \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y. \quad (\text{B.9})$$

If the system (B.3) is integrated in the spatial and temporal domain $\Omega_i \times [t^n, t^{n+1}]$, applying the Gauss's theorem, we have

$$\mathbf{U}_{ij}^{n+1} = \mathbf{U}_{ij}^n - \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\partial \Omega_{ij}} \mathbf{E} \hat{\mathbf{n}} dS dt + \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{S} dV dt + \frac{1}{\vartheta_{ij}} \int_0^{\Delta t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{D} dV dt, \quad (\text{B.10})$$

with $\Delta t = t^{n+1} - t^n$.

When considering a cartesian grid, every cell has the same area Δx^2 , therefore the updating formula is

$$\mathbf{U}_{ij}^{n+1} = \mathbf{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^- - \mathbf{F}_{i-1/2}^+ + \mathbf{G}_{j+1/2}^- - \mathbf{G}_{j-1/2}^+ - \bar{\mathbf{S}}_{ij} - \bar{\mathbf{D}}_{ij} \right), \quad (\text{B.11})$$

which is called the Godunov's scheme [30], where \mathbf{F}^- , \mathbf{G}^- represent the outgoing numerical fluxes and \mathbf{F}^+ , \mathbf{G}^+ are the incoming fluxes to the cell Ω_{ij} in the directions x and y (see Figure B.2), superscripts n and $n+1$ refer to the current time step and next step respectively, subscripts indicate the left, right, lower or upper wall of the cell Ω_{ij} and

$$\bar{\mathbf{S}}_{ij} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} \int_{y_{i+1/2}}^{y_{i-1/2}} \mathbf{S} dy dx dt, \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{ij} \approx \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \mathbf{D}_{ij} dy dx, \quad (\text{B.13})$$

are the approximation of the integral of the source terms and diffusion terms inside cells respectively.

1st order and 3rd order numerical schemes are used in this work. Fluxes are calculated by solving a Riemann problem (see Subsection B.2) at each wall of a cell when computing solutions by means of a 1st order numerical scheme. In the case of a 3rd order numerical scheme (see Figure B.3), fluxes at the right side of a wall of cell Ω_{ij} are computed as

$$\mathbf{F}_{i+1/2} \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{p=1}^k w_p \mathbf{F}_{i+1/2,p}, \quad (\text{B.14})$$

where w_p are Gaussian weights in the interval $[-1, 1]$ at the $p = 1, \dots, k$ quadrature points along the wall of the cell and k is the number of quadrature points along the wall. $\mathbf{F}_{i+1/2,p}$ are the numerical fluxes at each point, computed by solving the Derivative Riemann problem (DRP) [33], which is a high order extension of the RP. It is worth mentioning that the use of k quadrature points for the Gaussian integration allows to construct a $(2k - 1)$ -th order approximation of the integral of the flux along the interface.

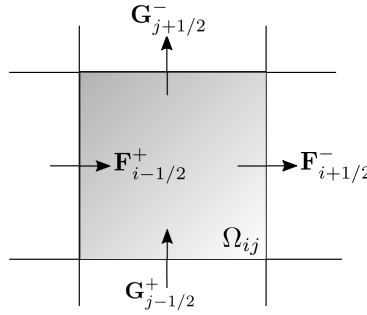


Figure B.2: Representation of the incoming and outgoing fluxes in cell Ω_{ij} .

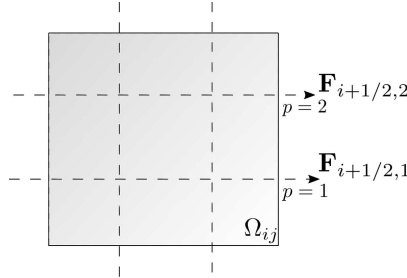


Figure B.3: Representation of the outgoing fluxes at the right wall of cell Ω_{ij} when using a 3rd order numerical scheme.

B.2. The Riemann problem

To calculate numerical fluxes, values of the variables at each wall of a cell are needed. To calculate them, an initial value problem consisting of the original equation in (B.3) and an initial condition given by the values of the conserved variables at each side of the wall (see Figure B.4) of interest is to be solved.

The Riemann problem (RP) [30] is defined at the right wall of a cell $(x_{i+1/2})$, neglecting j , for $\mathbf{F}_{i+1/2}$ as

$$\begin{cases} \text{PDEs: } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S} \\ \text{IC: } \mathbf{U}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^n & x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{U}_{i+1}^n & x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

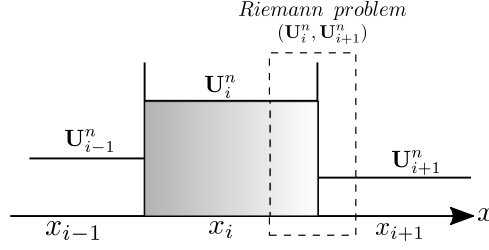


Figura B.4: Region of cell Ω_i and representation of mean values of the conserved variables. RP (dashed line) in the interface of the right wall of a cell.

for $x_{i+1/2} - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_{i+1/2} + \frac{\Delta x}{2}$ and $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t$. For the sake of clarity, the problem can be redefined by changing the spatial reference $x_{i+1/2}$ to $x = 0$ and the instant t^n to $t = 0$, which yields

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S} \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

for $-\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}$ and $0 \leq t \leq \Delta t$. This problem would have a solution if the jacobian matrix concerning the fluxes was a matrix with constant coefficients. When it is not the case and we handle a non-linear problem, like SWE, it is needed to use a Riemann solver to obtain a non-analytical solution. To do so, there are exact solvers and approximate solvers. In this project, the Roe method, an approximate solver, is used. It provides a solution to the RP by approximating the problem for another lineal problem in which $\mathbf{U} \approx \hat{\mathbf{U}}$ and the jacobian turns into a matrix of constant coefficients depending on the values at each side of the wall concerning the RP. Nevertheless, a comparison of the ARoe solver [36] and another approximate solver called HLLS [33] is presented in Figures C.31 - C.37 and commented in Section C.3.

B.3. Discretization of source terms

Source term vectors accounting for the bed slope variation, friction and turbulent diffusion have been named in Section A.2 when introducing the SWE. Their discretization is introduced in this section and in Section 3.2.

B.3.1. Bed slope

For convenience, source vector regarding bed slope is rewritten here

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Such vector is computed by integrating on the walls, for example,

$$\bar{S}_{z_{i+1/2,j}} = (-gh\delta z)_{i+1/2,j}, \quad (\text{B.18})$$

on the right wall of cell Ω_{ij} and inside the cells

$$\bar{S}_{z_{i,j}} = \frac{1}{\Delta t} \int \int \int -gh \nabla z \, dx \, dy \, dt, \quad (\text{B.19})$$

given that the bed height can vary at any point. The extension to high order is calculated by means of Gaussian quadrature [36].

B.3.2. Friction

Considering \mathbf{S}_f being computed by means of the second approximation of the wall friction, explained in equations (A.22) and (A.23), we have

$$\mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c_f |\mathbf{u}| u}{\rho} \\ -\frac{c_f |\mathbf{u}| v}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

The friction term is discretized as a centered source term. The integral is approximated by 2D Gaussian quadrature [37] and for the x direction, for example, we have

$$\bar{S}_{f_{i,j}} = \int_{\Omega} -c_f |\mathbf{u}| u \, d\Omega \approx \sum_{\alpha=1}^k w_{\alpha} \sum_{\beta=1}^k w_{\beta} (-c_f |\mathbf{u}| u)_{\alpha,\beta}, \quad (\text{B.21})$$

where k is the order of the scheme and α and β are the quadrature points at the walls of a cell.

B.4. Example of discretization of the convection-diffusion equation

The convection-diffusion equation is discretized and its updating formula will be derived in this Section in order to support previous explanations and to apply the suggested discretization of the diffusive terms in Section 3.2. Let us now consider the convection-diffusion equation in one dimension read

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{B.22})$$

where u is the variable of interest (concentration of solute, temperature,...), λ is the flow velocity and ν is the kinematic viscosity. If λ remains constant, then we can rewrite

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (\lambda u)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (\text{B.23})$$

being $f(\lambda u)$ the physical flux.

Consider now the scheme in one dimension depicted in Figure B.5 in which Ω_i is the cell of study, $i \pm 1/2$ corresponds to the cell walls and $f_{i+1/2}^-$, $f_{i-1/2}^+$ are the outgoing and incoming physical fluxes respectively.

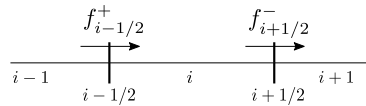


Figura B.5: Representation of the outgoing and incoming fluxes in cell Ω_i .

Expression (B.23) is substituted in (B.22) and the resulting expression is discretized, yielding

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^- - f_{i-1/2}^+}{\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad (\text{B.24})$$

where superscripts account for the considered time instant, Δt for the time step and Δx for the cell width. The diffusive term is discretized by means of a centered differencing

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\partial_x u_{i+1/2} - \partial_x u_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (\text{B.25})$$

being

$$\partial_x u_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad , \quad \partial_x u_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} . \quad (\text{B.26})$$

Last term of Equation (B.24) is obtained by substituting Expression (B.26) in (B.25).

Rearranging Equation (B.24) yields the following updating formula

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+1/2}^- - f_{i-1/2}^+ \right) + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) . \quad (\text{B.27})$$

Fluxes are calculated as time-averaged values, in the case of the outgoing flux of cell Ω_i

$$f_{i+1/2}^- = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f_{i+1/2}(t) dt , \quad (\text{B.28})$$

being $f(x, t) = \lambda u(x, t)$, which can be rewritten by means of Taylor series for $t = 0$ as

$$f(x, t) = \lambda u(x, t) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) t + \mathcal{O}(t^2) \quad (\text{B.29})$$

Therefore, substituting expression (B.29) in (B.28) yields

$$f_{i+1/2}^- = \lambda u_{i+1/2}^- = \lambda \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left(u_{i+1/2}(0) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i+1/2, t=0} t + \mathcal{O}(t^2) \right) dt . \quad (\text{B.30})$$

The next expression is obtained after integrating (B.30)

$$f_{i+1/2}^- = \lambda \left(u_{i+1/2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i+1/2} \frac{\Delta t}{2} + \mathcal{O}(t^2) \right) . \quad (\text{B.31})$$

Now we need an expression for $u_{i+1/2, t=0}$. In order to derive it, $u(x)$ is expanded in Taylor series within cell Ω_i

$$u(x) = u_i + \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) x + \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \right) \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + \dots , \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] , \quad (\text{B.32})$$

and $x = \frac{\Delta x}{2}$, so the value at the wall is obtained for $t = 0$

$$u_{i+1/2} = u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3) . \quad (\text{B.33})$$

Now, an expression for $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i+1/2, t=0}$ is sought in (B.22), so we use the Cauchy-Kovalevskaya procedure to obtain time derivatives of the variable in terms of spatial derivatives

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i+1/2, t=0} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \lambda \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x}{2} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

An expression for the flux $f_{i+1/2}^-$ is given by substituting (B.33) and (B.34) in (B.31)

$$\begin{aligned} f_{i+1/2}^- &= \lambda \left[u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x^2}{8} + \right. \\ &\quad \left. \left(\nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \lambda \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \frac{\Delta t}{2} \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Error terms $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ and $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ have been omitted in Equation (B.35).

An expression for the incoming flux $f_{i-1/2}^+$ is obtained analogously

$$f_{i-1/2}^+ = \lambda \left[u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x^2}{8} + \left(\nu \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} - \lambda \left(\frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta x} + \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \frac{\Delta t}{2} \right]. \quad (\text{B.36})$$

Therefore, the updating formula (B.27) is completed by substituting (B.35) and (B.36) in it.

Error terms of the discretization of the diffusive term can be derived as follows. Consider the diffusive equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{B.37})$$

which is discretized, yielding

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (\text{B.38})$$

Let us now expand the terms in (B.38) with respect to u_i^n

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (\text{B.39})$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (\text{B.40})$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2} - \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (\text{B.41})$$

By rearranging (B.39) we obtain

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (\text{B.42})$$

which is the 1st term in Equation (B.37) with its error term.

By substituting (B.40) and (B.41) in (B.37) we get to the expression with the error term in space

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (\text{B.43})$$

Thereupon, the 1st order error term in time is shown in Equation (B.42) and the 2nd order error term in space is shown in Equation (B.43). Hence,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = (u_t - \nu u_{xx})_i^n + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2). \quad (\text{B.44})$$

The order of the error concerning the convective term can be derived in a similar procedure.

Apéndice C

Numerical experiments and sensitivity analysis

C.1. Convergence analysis

As a test, numerical results of the derivatives discretization (explained in section B.3) have been compared to analytical results calculated with Matlab.

To do so, the next Gaussian function has been chosen

$$g(x, y) = 0,2 \exp \left(-\frac{(x-50)^2 + (y-50)^2}{80} \right), \forall (x, y) \in \Omega \quad (\text{C.1})$$

being the computational domain $\Omega = [0, 100] \times [0, 100]$. $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ have been calculated in the center of the cells belonging to two different grids, one of them 20×20 ($\Delta x = 5 \text{ m}$) and the other one 200×200 ($\Delta x = 0,5 \text{ m}$). The Gaussian function (C.1) is pictured in Figure C.1 for both grids. Also, the derivative respect to x can be seen in Figure C.2. Both Figures correspond to analytical data provided by Matlab.

To obtain the rate of convergence of the discretization, norm 1 of the absolute errors vector has been calculated.

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |u_i - u(x_i)| (\Delta x)^2, \quad (\text{C.2})$$

where $u_i, u(x_i)$ are numerical and analytical values respectively. Norm 1 has been multiplied by cell area in order to normalize and compare the errors after using both grids. The results are depicted in Figures C.3, C.4, C.5, C.6 and C.7.

In the case of the numerical method used to calculate the cross derivatives like the one in Figure 3.4, a mean value of this type is calculated, which yields the 2nd order approximation per se before calculating the mean value at the walls of a cells to obtain the value of the derivative in the center of a cell. In the case of the derivatives like $\partial u / \partial x$, the 2nd order of the approximation is obtained when calculating the value of the derivative in the center of a cell by using the values at each wall in the direction of the derivative.

In Figure C.7 a rate of convergence of 2 due to the discretization to the exact solution can be observed. The rate of convergence is calculated as follows [31]

$$n = \frac{\ln((L_1)_1 / (L_1)_2)}{\ln(\Delta x_1 / \Delta x_2)}, \quad (\text{C.3})$$

obtaining a value of 1,96 and 1,94 (cross derivatives) for the calculated errors through expression (C.2). The subscript 1 corresponds to L_1 and Δx of the 20×20 grid, and subscript 2 concerns the 200×200

grid. These values of L_1 are written in Table C.1. Given the symmetry of the example to check the rate of convergence, the errors of the cross derivatives $(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x})$ are the same. This also happens with the rest of derivatives $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$. This feature can be seen in Figure C.7, where the represented errors are overlapped.

	20x20 grid	200x200 grid
$L_1 \partial u / \partial x$	1.4341	0.0157
$L_1 \partial u / \partial y$	1.5285	0.0173
$L_1 \partial v / \partial x$	1.5285	0.0173
$L_1 \partial v / \partial y$	1.4341	0.0157

Tabla C.1: Error results of the derivatives discretization calculated in Matlab through expression (C.2).

The reason why the rate of convergence is 2 is due to the number of cells concerning the numerical calculus of the derivative in the center of each cell. The demonstration is as follows. Consider Taylor's expansion in $x = x_0 + h$ of a continuous and infinitely differentiable function read

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots . \quad (\text{C.4})$$

If we just take into account the terms until the 2nd order derivative and rearrange, a 1st order approximation of the derivative in x_0 is given in what is called forward differencing

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(x_0) . \quad (\text{C.5})$$

Something similar is obtained if this method is also followed to approximate the derivative in $x = x_0 - h$ (backward differencing)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2}f''(x_0) . \quad (\text{C.6})$$

A method is said to be of order p when the error term is of the order of $\mathcal{O}(h^p)$. Therefore, these methods in (C.5),(C.6) are said to be of order 1.

Now, in order to obtain another approximation of the derivative value in $x = x_0$, we consider Taylor's expansion of $f(x_0 + h)$ and $f(x_0 - h)$ until we have the 3rd order derivative term and we subtract one from the other as follows

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \approx 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) . \quad (\text{C.7})$$

Rearranging (C.7) yields

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3}f'''(x_0) , \quad (\text{C.8})$$

which is basically a mean value of forward differencing and backward differencing in the interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ (centered differencing) plus a second-order error term. This second-order error term is the responsible term of the decreasing of L_1 in 100 times when the grid is refined 10 times.

To end with, the written script to carry out this analysis of convergence is shown next.

```

1 clear all
2 syms x y
3 diff(0.2*exp(-(x-50)^2+(y-50)^2)/80),x)
4 diff(0.2*exp(-(x-50)^2+(y-50)^2)/80),y)
5 %%%% 20x20 grid : dx=5
6 clear all
7 close all
8 load('datos20.mat')
```

```

9 load('datos200.mat')
10
11 dx=5.0;
12 l=dx*20;
13 [x,y]=meshgrid(dx/2:dx:l-dx/2,dx/2:dx:l-dx/2);
14 ncell=length(x);
15 u=0.2*exp(-((x-50).^2+(y-50).^2)/80);
16
17 %%%%% Values and errors calculated in the center of the cells for the
18 %%%%% 20x20 grid
19 dudx_a=-(exp(-(x-50).^2/80 - (y-50).^2/80).*(x/40 - 5/4))/5;
20 error_dudx=abs(dudx_a-DUDX);
21
22 dvdx_a=dudx_a;
23 error_dvdx=abs(dvdx_a-DVDX);
24
25 dvdy_a=-(exp(-(x-50).^2/80 - (y-50).^2/80).*(y/40 - 5/4))/5;
26 error_dvdy=abs(dvdy_a-DVDY);
27
28 dudy_a=dvdy_a;
29 error_dudy=abs(dudy_a-DUDY);
30
31 %%%%% Figures corresponding to 20x20 grid
32 figure(1)
33 contour(x,y,dudy_a,20)
34 colorbar
35 title('\partial u/\partial y analytical. 20x20 grid.','fontsize',25)
36 print('dudyanaly2020','-depsc')
37
38 figure(2)
39 contour(x,y,DUDY,20)
40 colorbar
41 title('\partial u/\partial y numerical. 20x20 grid.','fontsize',25)
42 print('dudynumer2020','-depsc')
43
44 figure(3)
45 contour(x,y,error_dudy,20)
46 colorbar
47 title('Error \partial u/\partial y. 20x20 grid','fontsize',25)
48 print('Errordudy2020','-depsc')
49
50 figure(4)
51 contour(x,y,dudx_a,20)
52 colorbar
53 title('\partial u/\partial x analytical. 20x20 grid.','fontsize',25)
54 print('dudxanali2020','-depsc')
55
56 figure(5)
57 contour(x,y,DUDX,20)
58 colorbar
59 title('\partial u/\partial x numerical. 20x20 grid.','fontsize',25)
60 print('dudxnumer2020','-depsc')
61
62 figure(6)
63 contour(x,y,error_dudx,20)
64 colorbar
65 title('Error \partial u/\partial x. 20x20 grid.','fontsize',25)

```

```

66 print('Errordudx2020','-depsc')
67 %%% Norm 1 calculus multiplied by the area of the cell to compare
    results
68 %%% of both grids
69 L1_dudx(1)=0.0;
70 L1_dvdy(1)=0.0;
71 L1_dudy(1)=0.0;
72 L1_dvdx(1)=0.0;
73 for i = 1:ncell
74     for j = 1:ncell
75         L1_dudx(1)=L1_dudx(1)+error_dudx(i,j)*dx*dx;
76         L1_dvdy(1)=L1_dvdy(1)+error_dvdy(i,j)*dx*dx;
77         L1_dudy(1)=L1_dudy(1)+error_dudy(i,j)*dx*dx;
78         L1_dvdx(1)=L1_dvdx(1)+error_dvdx(i,j)*dx*dx;
79     end
80 end
81
82 %%% 200x200 grid : dx=0.5
83 dx=0.5;
84 l=dx*200;
85 [x,y] = meshgrid(dx/2:dx:l-dx/2,dx/2:dx:l-dx/2);
86 ncell=length(x);
87 u=0.2*exp(-((x-50).^2+(y-50).^2)/80);
88
89 %%% Values and errors calculated in the center of the cells for the
90 %%% 200x200 grid
91 dudx_b=-(exp(-(x-50).^2/80 - (y-50).^2/80).*(x/40 - 5/4))/5;
92 error_dudx=abs(dudx_b-DUDX200);
93
94 dvdx_b=dudx_b;
95 error_dvdx=abs(dvdx_b-DVDX200);
96
97 dvdy_b=-(exp(-(x-50).^2/80 - (y-50).^2/80).*(y/40 - 5/4))/5;
98 error_dvdy=abs(dvdy_b-DVDY200);
99
100 dudy_b=dvdy_b;
101 error_dudy=abs(dudy_b-DUDY200);
102
103 %%% Norm 1 calculus multiplied by the area of the cell to compare
    results
104 %%% of both grids
105 L1_dudx(2)=0.0;
106 L1_dvdy(2)=0.0;
107 L1_dudy(2)=0.0;
108 L1_dvdx(2)=0.0;
109 for i = 1:ncell
110     for j = 1:ncell
111         L1_dudx(2)=L1_dudx(2)+error_dudx(i,j)*dx*dx;
112         L1_dvdy(2)=L1_dvdy(2)+error_dvdy(i,j)*dx*dx;
113         L1_dudy(2)=L1_dudy(2)+error_dudy(i,j)*dx*dx;
114         L1_dvdx(2)=L1_dvdx(2)+error_dvdx(i,j)*dx*dx;
115     end
116 end
117
118 %%% Figures corresponding to 200x200 grid
119 figure(7)
120 contour(x,y,dudy_b,20)

```



```

121 colorbar
122 title('\partial u/\partial y analytical. 200x200 grid.','fontsize',25)
123 print('dudyanali200200','-depsc')
124
125 figure(8)
126 contour(x,y,DUDY200,20)
127 colorbar
128 title('\partial u/\partial y numerical. 200x200 grid.','fontsize',25)
129 print('dudynumeri200200','-depsc')
130
131 figure(9)
132 contour(x,y,error_dudy,20)
133 colorbar
134 title('Error \partial u/\partial y. 200x200 grid','fontsize',25)
135 print('Errordudy200200','-depsc')
136
137 figure(10)
138 contour(x,y,dudx_b,20)
139 colorbar
140 title('\partial u/\partial x analytical. 200x200 grid.','fontsize',25)
141 print('dudxanali200200','-depsc')
142
143 figure(11)
144 contour(x,y,DUDX200,20)
145 colorbar
146 title('\partial u/\partial x numerical. 200x200 grid.','fontsize',25)
147 print('dudxnumeri200200','-depsc')
148
149 figure(12)
150 contour(x,y,error_dudx,20)
151 colorbar
152 title('Error \partial u/\partial x. 200x200 grid.','fontsize',25)
153 print('Errordudx200200','-depsc')
154
155 %%%% Figure in logarithmic scale to see the rate of convergence
156 malla=[20 200];
157 figure(13)
158 xlim([1 300])
159 loglog(malla,L1_dudx,'--bo',malla,L1_dudy,'--bo',malla,L1_dvdy,'-.go',
        malla,L1_dvdx,'-.go');
160 grid on;
161 xlim([10 300])
162 ylim([0.01 2])
163 hold on;
164 box on;
165 set(gca,'layer','top','FontSize',25);
166 hXLabel = xlabel('N_{cells}');
167 hYLabel = ylabel('L_1');
168 print('logar','-depsc')
169 hold off;

```

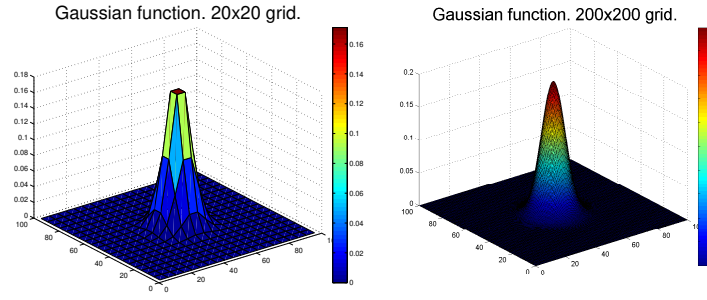


Figura C.1: Representations of the chosen Gaussian function. Left: 20×20 grid. Right: 200×200 grid.

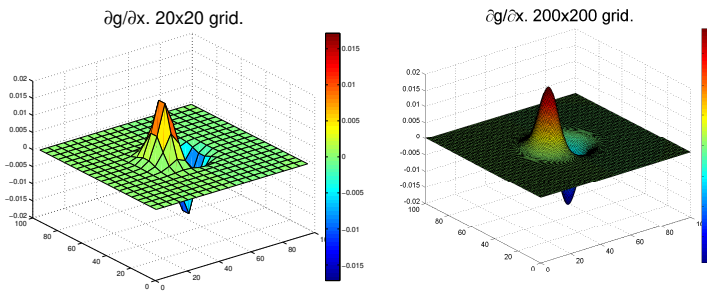


Figura C.2: Representations of the derivative respect to x of the chosen Gaussian function. Left: 20×20 grid. Right: 200×200 grid.

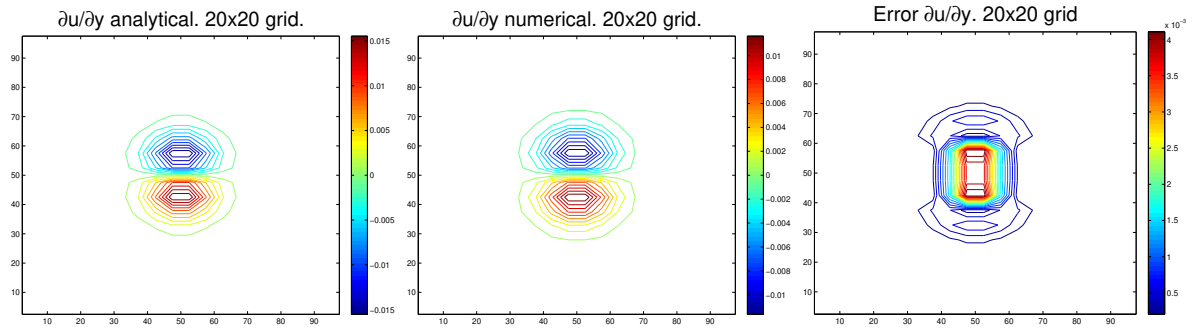


Figura C.3: Analytical and numerical representation of the derivative respect to y in a 20×20 grid. The absolute error can be observed on the right.

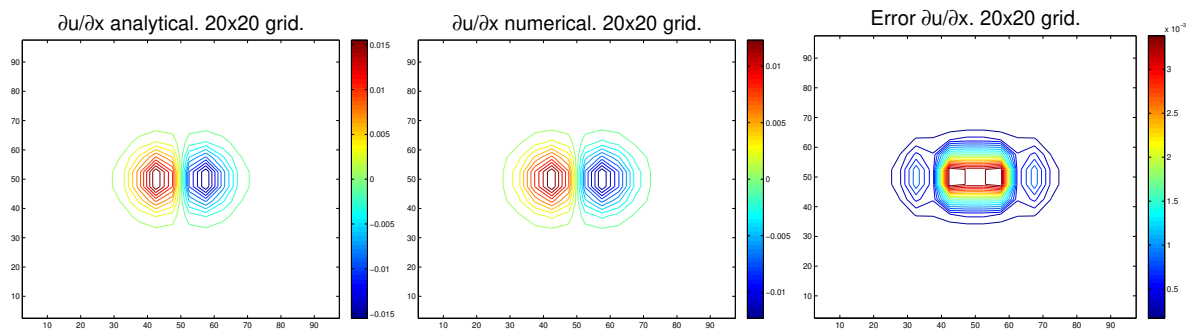


Figura C.4: Analytical and numerical representations of the derivative respect to x in a 20×20 grid. The absolute error can be observed on the right.

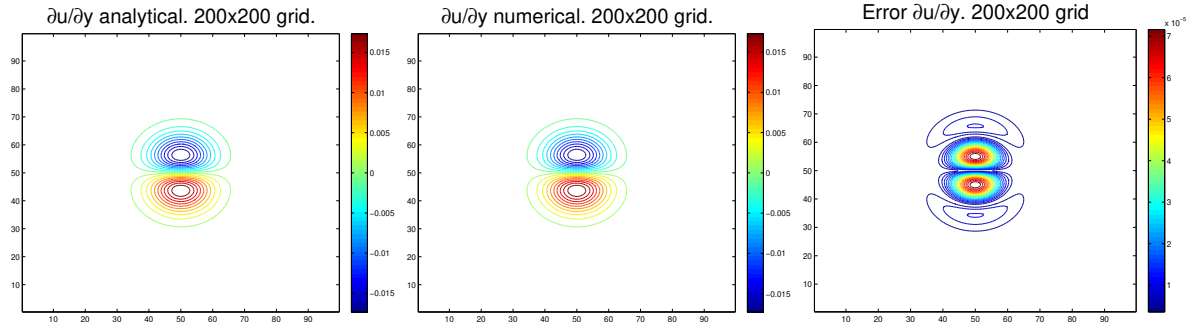


Figure C.5: Analytical and numerical representation of the derivative respect to y in a 200×200 grid. The absolute error can be observed on the right.

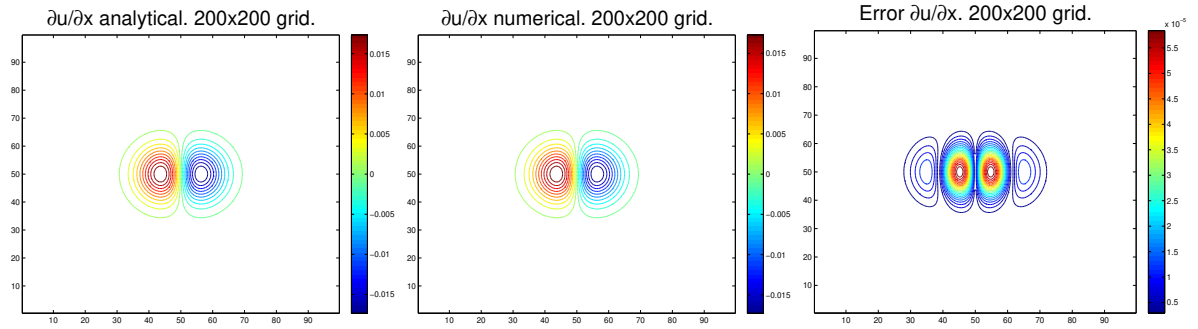


Figure C.6: Analytical and numerical representations of the derivative respect to x in a 200×200 grid. The absolute error can be observed on the right.

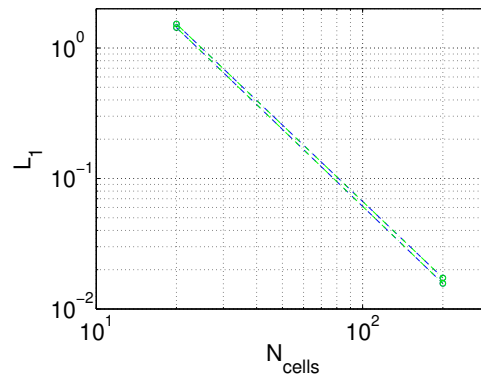


Figure C.7: Representation concerning norm 1 of the errors vector multiplied by the cell area versus number of cells in x or y direction of the cartesian grid used to carry out the convergence analysis. It is observed that the suggested discretization of the derivatives converges to the analytical solution with order 2.

C.2. Analytical case

To check the validity of the proposed numerical simulations, an analytical test case is proposed. The intention is to double check the velocity profile of a straight and fully developed open channel flow with a non-slip boundary condition at the solid walls (see Figure C.8). The velocity profile provided by the simulation is compared with the analytical solution, which is derived below.

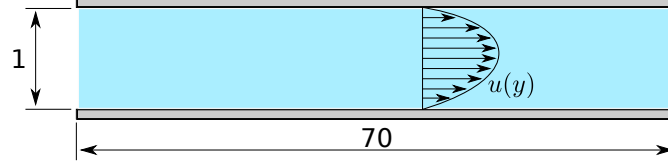


Figura C.8: Dimensions of the computational domain in meters. The water depth is 1 meter.

Let us consider next expressions from the SWE in (A.16). We depart from the mass and x -momentum conservation equations, which in the case of constant kinematic viscosity ν reads

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = -gh \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2h\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right). \quad (\text{C.10})$$

If we assume fully developed flow, then

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.11})$$

If steady flow is also assumed, then

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) = 0, \quad (\text{C.12})$$

which in combination with (C.9) and $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ (approximation considering small changes in water depth along y axis) yields

$$\frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = 0. \quad (\text{C.13})$$

If the aforementioned assumptions are taken into account, inserting (C.11), (C.12) and (C.13) in (C.10), yields

$$0 = -gh \frac{\partial z}{\partial x} + h\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{g}{\nu} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (\text{C.14})$$

By integrating (C.14), the velocity profile is expressed as

$$u(y) = \frac{g}{\nu} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} \right) + C_1 y + C_2. \quad (\text{C.15})$$

The analytical solution is obtained when applying the no-slip condition $u(y=0) = 0$ and $u(y=L) = 0$ to solve the integration constants

$$u(y) = \frac{g}{\nu} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{Ly}{2} \right), \quad (\text{C.16})$$

where L is the channel width. The following constants are substituted in (C.16) for two different cases:

- Case 1

$$L = 1 \text{ m} \quad \nu = 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-3} \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad h = 1 \text{ m}, \quad (\text{C.17})$$

- Case 2

$$L = 1 \text{ m} \quad \nu = 10^{-2} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-2} \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad h = 1 \text{ m}, \quad (\text{C.18})$$

both yielding the analytical solution

$$u(y) = -\frac{g}{2} (y^2 - y) \quad , 0 \leq y \leq 1. \quad (\text{C.19})$$

It is also necessary to calculate the flow rate in order to setup the numerical simulation, from the definition of flow rate we have

$$Q = L \int_0^1 hu(y)dy . \quad (\text{C.20})$$

Since we have assumed $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ m, $h = 1$ m and $L = 1$ m then (C.20) yields

$$Q = -\frac{g}{2} \int_0^1 (y^2 - y) dy = \frac{g}{12} . \quad (\text{C.21})$$

Two cases involving a different kinematic viscosity are considered and will be computed using a 1st and 3rd order scheme using two different grids of $\Delta x = 0,1$ m and $\Delta x = 0,04$ m. The simulation is setup as follows. Upstream, the discharge, Q in C.20 is prescribed as a constant unitary discharge along the inlet to allow for the flow to develop. Downstream, a water depth of $h=1$, is set. At the solid boundaries, the non-slip condition is applied. No turbulence model is used in this simulation, therefore ν_e remains as a constant kinematic viscosity. The channel length is 70 m to reach fully developed flow. Given the constants stated in (C.17), the flow is subcritical, with a maximum Froude number of $Fr_{max} \approx 0,4$, and the maximum Reynolds number is $Re_{max} \approx 1230$ for case 1. Both dimensionless numbers are calculated with the analytical velocity on the center line of the channel width. L_1 norm is calculated over the absolute errors vector in order to obtain the rate of convergence

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |u_i - u(x_i)| (\Delta x) , \quad (\text{C.22})$$

where u_i , $u(x_i)$ are numerical and analytical values respectively. Norm 1 has been multiplied by cell width in order to normalize and compare the errors after using both grids. The rate of convergence [31] is calculated as follows

$$n = \frac{\ln((L_1)_1 / (L_1)_2)}{\ln(\Delta x_1 / \Delta x_2)} . \quad (\text{C.23})$$

The subscript 1 corresponds to $\Delta x = 0,1$ m and subscript 2 corresponds to $\Delta x = 0,04$ m. The more refined the grid, the smaller the error, as can be seen in Figures C.9, C.10 where velocity profiles for $x = 50$ m are depicted. The error also slightly improves as the order of the discretization of the convective terms raises to 3, but not much, due to the dominance of the diffusive term in the updating formula, as it is discretized using 2nd order differences. A plot of $h(x)$ is presented in Figure C.11 left. It shows that the outlet boundary condition of water depth is equal to 1 and that the more refined the grid, the better it approaches the analytical solution. Also, the evolution in the x direction of the velocity at the center line of the channel is depicted in Figure C.11 right. It shows a fully development of the flow for $x \approx 50$ m and a more accurate approximation as the grid is refined as well. Velocity profiles at different cross sections within the channel are depicted in Figure C.12. They asymptotically approach the analytical solution in the flow direction.

For case 2, in which constants in C.18 are set up, three 1st order cases for 3 different grids $\Delta x = 0,1$, $0,04$, $0,02$ m are simulated with a $Re_{max} \approx 122$. It is noticed that the higher the viscosity, the more refined the grid has to be in order to converge to the analytical solution, as can be seen in Figures C.13 left and right. 3rd order results are not presented because they make no relevant change with respect to the 1st order ones. It is then noticed that the relation with the grid refinement is stronger than the relation with the order of the numerical scheme used, as the diffusive terms are dominant.

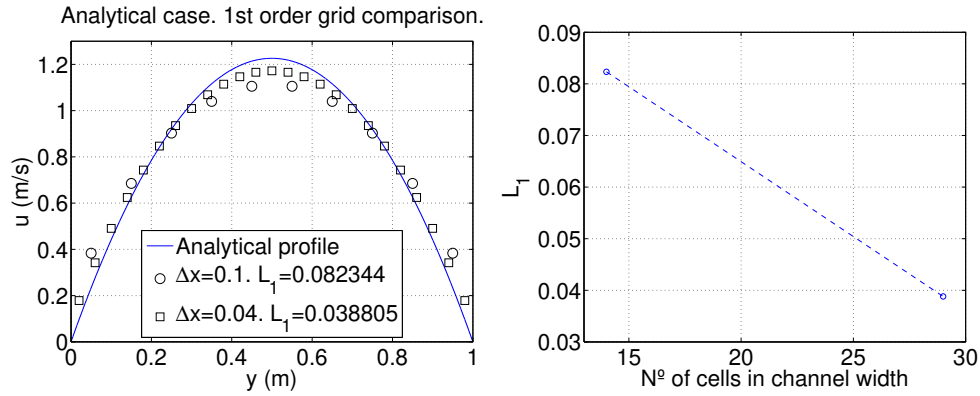


Figura C.9: Left: Analytical velocity profile $u(y)$ and numerical results provided by the 1st order scheme. Right: L_1 error norm vs number of cells in the y direction.

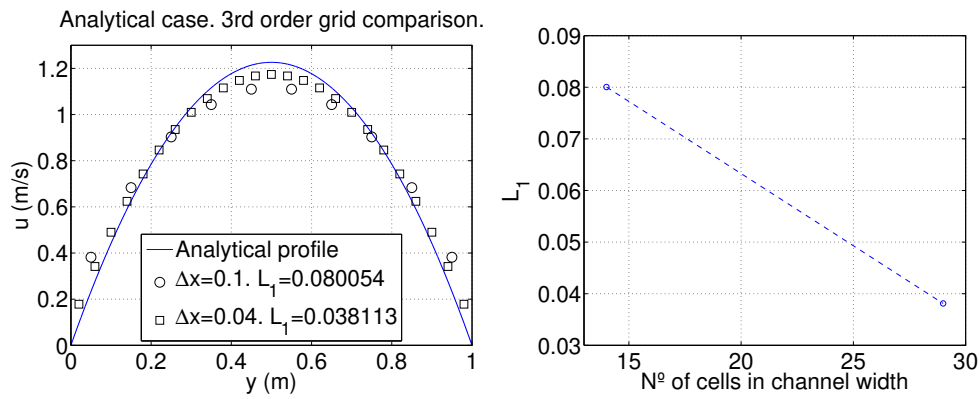


Figura C.10: Left: Analytical velocity profile $u(y)$ and numerical results provided by the 3rd order scheme. Right: L_1 error norm vs number of cells in the y direction.

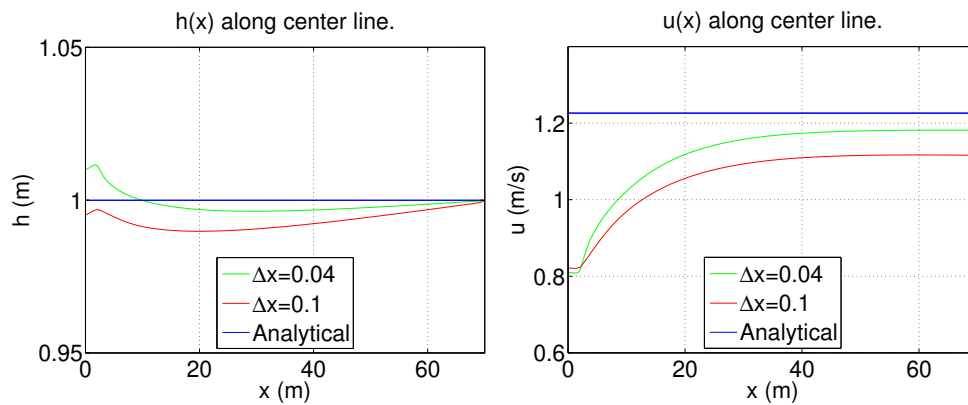


Figura C.11: Left: Water depth along the center line of the simulated rectilinear channel showing the the outlet boundary condition. Right: u along the center line of the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity. 3rd order simulations.

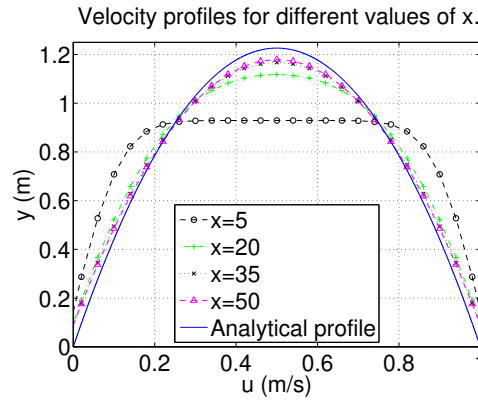


Figura C.12: Velocity profiles for different cross sections along the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity profile. 3rd order simulations with $\Delta x = 0,04$ m.

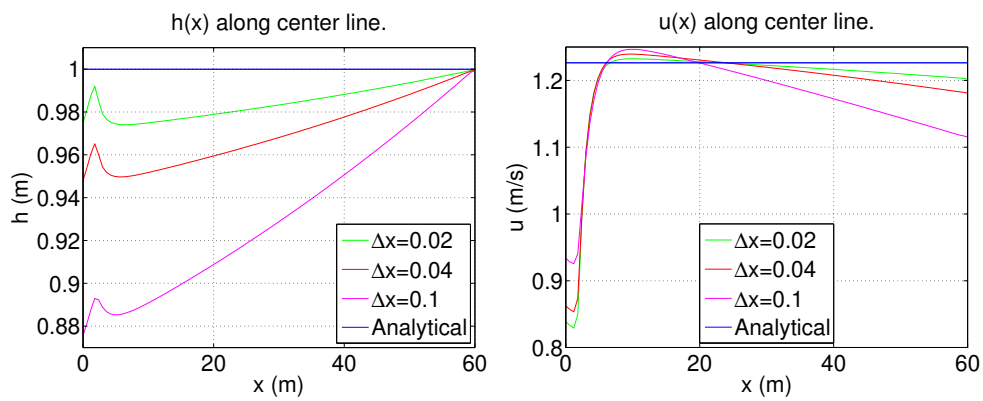


Figura C.13: Left: Water depth along the center line of the simulated rectilinear channel showing the outlet boundary condition. Right: u along the center line of the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity. 1st order simulations with $\nu = 0,01 \frac{m^2}{s}$ and $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,01$.

C.3. Experimental validation 1: sudden expanded flume

Turbulence models have been discussed in Section 2.3, and four calibration parameters λ , β , n_w and y_w have been introduced. Such models are going to be applied here to the resolution of an experimental case that consists of a channel with a sudden expansion. The geometry of the channel is depicted in Figure C.14. After the expansion, a steady vortex appears. Measured values are taken from [17]. Velocities have been measured at different cross sections $x = 0, 1, 2, 3, 4$ and 5. Note that $x = 0$ m is located at the expansion. In this section, the measured velocities and the size of the vortex are going to be compared to the numerical results provided by the simulation models proposed in this work. In the experiment, a discharge of $Q_{exp} = 0,01815 \text{ m}^3/\text{s}$ is considered. All shown screenshots concern time instants after steady state is reached if the opposite is not said when explaining them. The simulation is setup as follows. Upstream, the discharge, $Q = 0,01815/0,6 \text{ m}^3/\text{s}$ is prescribed as a constant unitary discharge along the inlet to allow for the flow to develop. Downstream, a water depth of $h = 0,1 \text{ m}$, is set. Rest of constants that are not to calibrate are substituted as follows

$$\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -10^{-4} \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (\text{C.24})$$

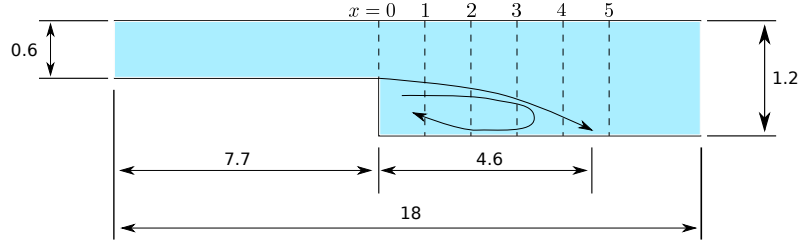


Figura C.14: Experimental details of the sudden-expanded flume. Experimental values of x component of velocity, u , were collected along the sections represented by dashed lines. Distances are in meters.

A loop has been programmed in order to calibrate the turbulence models. This loop consists of computing λ as

$$\lambda = 0,1 + \frac{1,8}{500} (t - 400) \quad (\text{C.25})$$

at each time step, starting at $t = 400 \text{ s}$ (λ remains as 0,1 before $t = 400 \text{ s}$) until $t = 1600 \text{ s}$. Plots of the mean error (see expression (C.27)) vs λ can be obtained by repeating this loop for different values of $\beta = 0, 2, 4, 8$ and 12. Numerical results for such loops are computed using a 3rd order scheme in a $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ mesh and are presented in Figure C.15. From this plots, we can find which values of λ and β fit experimental values the best. Notice that the results in Figure C.15 show higher sensitivity to λ than to β . A Matlab script appended at the end of this section is used to automate this calibration process.

The errors for each velocity profile are computed as

$$Err_j = \sqrt{\frac{\sum (u_i^{sim} - u_i^{exp})^2}{\sum (u_i^{exp})^2}}, \quad (\text{C.26})$$

where the superscripts *sim* and *exp* stand for numerical and experimental data respectively and Err_j stands for the error for each velocity profile. There are as many terms as experimental values of velocity are available for each velocity profile. It is worth mentioning that the y locations of the experimental measurements do not exactly coincide with the y coordinates of the cell centers of the mesh. Therefore, the closest values of numerical y to every experimental y is selected to calculate the velocity error in (C.26). The overall error, accounting for the 6 experimental velocity profiles, is calculated as

$$Err_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^6 Err_j}{6}. \quad (\text{C.27})$$

Besides, the 2D velocity fields provided by the simulations have been checked to assure the proper reattachment length. The reattachment length can be seen in Figure C.14, and it corresponds to the distance of 4,6 m from the expansion. In the numerical results, it is measured at the closest point to the wall where the streamlines diverge and separate both in the downstream direction and in the upstream direction. Optimal values around $1 \leq \lambda \leq 1,4$ and $4 \leq \beta \leq 12$ can be seen in Figure C.15. Values of $\lambda = 1,3$ and $\beta = 7$ are chosen for numerical simulations from now on to provide the right reattachment length with a low mean error.

A comparison of both options to compute \mathbf{S}_f depending on the approximation on the wall friction explained in Section A.2 can be seen in Figure C.16. It is observed that both approaches provide very similar results, obtaining an slightly better approximation when using the compound manning approach. The simplicity of implementation of the aforementioned method, which does not require any iterative calculation, motivates the choice of this method for the rest of the simulations.

A comparison of both ways of computing the turbulent diffusion vector, (A.25) to (A.27) and (A.35), is depicted in Figures C.18, C.19 for a 1st and 3rd order numerical scheme respectively and a cell size $\Delta x = 0,025 \text{ m}$. The simplified form of the Boussinesq assumption makes almost no difference in the numerical results. It is decided to use the Boussinesq assumption without any simplification because it is more general and may provide a more accurate numerical solution when computing transient events where the gradients in the water depth are not negligible.

Once λ and β are calibrated, it is worth understanding the role of n_w and y_w in the numerical solution in order to eventually provide a more accurate calibration.

A set of profiles showing the role of n_w in the solution are depicted in Figure C.17. These simulations are carried out with a 3rd order numerical scheme and a cell size $\Delta x = 0,025 \text{ m}$. A reduction of the velocity near the walls is observed as n_w is increased, as expected due to higher friction. Furthermore, as n_w is risen, the velocity in the center of the channel increases due to mass conservation in the steady state. Nevertheless, most of the velocity profiles provided by the numerical results have almost no change in the mid part, because $n_b = 0,013 \frac{s}{m^{1/3}}$ remains constant and so does the bed friction. It is observed that values of $n_w = 0,008 \frac{s}{m^{1/3}}$ and $n_w = 0,016 \frac{s}{m^{1/3}}$ fit better some profiles at the upper and lower parts of the velocity profile, however, $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$ provides a more balanced results having in count both, experimental velocity profiles and reattachment length. This is why $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$ is chosen from now on to carry out following simulations.

Analogously, another set of profiles showing how numerical results vary depending on the strength of the turbulence produced by the shear stresses near the walls is depicted in C.20. Let us recall the expression for the mixing length model that included coefficient y_w read

$$l_s = \min \left(\kappa c_m h \sqrt{\beta}, y_w \kappa \right) . \quad (\text{C.28})$$

In this expression, we notice that the strenght of the shear turbulence near the wall is determined by the magnitude of y_w , which is the distance to the nearest wall. By introducing an additional parameter by which y_w can be divided, the eddy viscosity near walls can be controlled. In each of the four cases depicted in Figure C.20 y_w is divided by 1, 2, 4 and 6. Hence, diffusion is supposed to be smaller for the case $y_w/6$ because a random cell would be computed as six times closer to a wall and l_s will likely be equal to a smaller quantity.

Results in Figure C.20 show better results for $x = 0, 1$ and 2 when y_w is divided by 4. Results for $y_w/6$ may fit better experimental data at $x = 3$ and 4 . It is unclear which value $y_w/4$ or $y_w/6$ fits better the profile corresponding to $x = 5 \text{ m}$. It is noticed that $y_w/4$ fits better most of the profiles, which can support a more balanced overall results. Hence, y_w is divided by 4 in the forthcoming simulations.

Once the calibration is finished, it is worth showing a comparison between the turbulence models presented in Section 2.3 to see how numerical results change and which one fits better the sudden expansion experimental case. To do so, five different cases are simulated with a 3rd order numerical scheme and same parameter configuration

$$n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}, \quad y_w/4 \text{ m}, \quad \lambda = 1,3, \quad \beta = 7, \quad \Delta x = 0,025 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s} . \quad (\text{C.29})$$

In some cases, λ and β may equal zero and $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ may be changed for $10^{-3} \frac{m^2}{s}$. Let us now explain the five different cases simulated.

- Option 1: No diffusion, hence

$$\nu_e = 0 . \quad (C.30)$$

- Option 2: Considering just constant intrinsic kinematic viscosity equal to $10^{-3} \frac{m^2}{s}$ within the turbulent diffusion vectors. Therefore

$$\nu_e = 10^{-3} \frac{m^2}{s} . \quad (C.31)$$

- Option 3: Considering just constant intrinsic kinematic viscosity equal to $10^{-6} \frac{m^2}{s}$ within the turbulent diffusion vectors. Therefore

$$\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s} . \quad (C.32)$$

- Option 4: Computing $\nu_e = \nu + \nu_t$, where ν_t is calculated through the depth-averaged parabolic turbulent viscosity model (Subsection 2.3.2), read

$$\nu_t = \lambda U_* h . \quad (C.33)$$

- Option 5: Computing $\nu_e = \nu + \nu_t$, where ν_t is calculated through the depth-averaged mixing length model (Subsection 2.3.3) read

$$\nu_t = \sqrt{(\nu_t^v)^2 + (\nu_t^h)^2} . \quad (C.34)$$

Time-averaged velocities in the x direction are presented in Figure C.21 and results for the reattachment length can be observed in Table C.2. For options 2, 4 and 5, instantaneous velocities are equal to the time-averaged quantities as in these cases there is enough diffusion to avoid transient vortex shedding. An overview of variables u and ν_e for every case is depicted in Figures C.22 - C.26. Numerical results for $\nu_e = 0 \frac{m^2}{s}$ and $\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ alike because in both cases ν_e is either nil or very small. These two show different recirculation areas, as the reader can see in Figures C.22, C.24. The reason behind is that there is not enough diffusion to smooth gradients, plus, there is an unsteady flow due to the discontinuity in the velocity field that generates a transient shedding of vortices. Besides, higher velocities can be observed for these cases. The option concerning $\nu_e = \nu = 10^{-3}$ is interesting, it shows both, good approximation to experimental results and almost experimental reattachment length. Nevertheless, this case considers a very high kinematic viscosity, having in count that the experimental fluid was water this may be slightly unreal. But it shows good results because its to-the-minus-three viscosity order (see Figure C.23) has the same order than the one obtained when using turbulence models shown in Figures C.25 and C.26, it would be a good option to simulate with if we wanted a quick view of a given situation. Case 4, involving just the parabolic viscosity model, returns too high velocities in the recirculation area in addition to a short reattachment length. The last case, accounting for the mixing length model, returns a reattachment length with a relative error of 4,3 %. It also fits experimental data slightly better than the parabolic viscosity model. These pictures account for the last simulation instant. Since a time-averaged screenshot may also provide useful information, the same aforementioned five cases are represented in time-averaged pictures in Figure C.27. They show a time-averaged horizontal velocity calculated with the last 100 instants, from $t = 300 s$ until $t = 400 s$. Recirculation areas at the upper part still appear even after the time averaging for the cases without diffusion and $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. To sum up, results for $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$ without turbulence model could be used to give a fast approximation at first, but no calibration parameters λ, β and y_w would be available out of it. Since results with the mixing length model give better results than the parabolic viscosity model concerning both velocity profiles and reattachment length in addition to a wider calibration parameters option, it is chosen as the best choice.

Additionally, a convergence analysis with mesh refinement is carried out for 1st and 3rd order numerical schemes with a configuration $\lambda = 1,3$, $\beta = 7$, $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$ and $y_w/4$. Results for four different cell sizes are plotted in Figures C.28 and C.29 for 1st and 3rd order respectively. Data including Err_{mean} and numerical reattachment length for 1st and 3rd order simulations depending on the mesh refinement can be seen in Tables C.3 and C.4. Lowest error is observed for 1st order results with a cell size

$\Delta x = 0,025 \text{ m}$, maybe because calibration was carried out for that cell size. A convergence depending on mesh refinement is not observed in Figure C.28 and similar results are obtained for values of Δx around 0.025. Alike results are shown in Figure C.29 concerning 3rd order results, but this time results have less dispersion due to the lower numerical diffusion thanks to the 3rd order scheme. Results are alike because even if there is lower numerical diffusion in convective terms, the diffusive terms are discretized with a 2nd order approximation and it makes small changes when changing cell size. However, they provide a better approximation for $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ than the 1st order numerical scheme, and almost experimental reattachment length. Notice there is not convergence in the same sense it is in the analytical test either. This may be because we are now trying to mimic reality by using equations derived with many assumptions. The analytical case was derived starting on the SWE itself, and therefore the convergence is supposed to be different.

Additionally, pictures showing streamlines for the 1st and 3rd order case corresponding to $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ and $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ respectively as well as a 3rd order case with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ can be seen in Figure C.30. It is noticed that the 3rd order results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ shows a shorter reattachment length, which gives a different shape of the recirculation area.

Finally, the configuration we can end up with this calibration is as follows

$$n = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}} \quad \nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s} \quad \beta = 7 \quad \lambda = 1,3 \quad \frac{y_w}{4} \text{ m} . \quad (\text{C.35})$$

Regarding cell size and order of the numerical scheme, best results are obtained for a cell size $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ in the case of 1st order scheme and $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ for the 3rd order scheme.

It is worth showing that the choice of the Riemann solver is of utmost importance to compute this expanded flow with accuracy. In all previous tests, the ARoe solver has been used, as it is known to be more accurate than the HLLS solver [33]. To justify the use of the ARoe solver, a comparison between the aforementioned solvers is presented. Results provided by ARoe solver and HLLS solver without considering any diffusion vector are depicted in Figures C.31 - C.37. The magnitude of velocity is depicted in Figures C.31 - C.33. Instantaneous vorticity ($\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$) in axis z can be observed in Figures C.34 and C.35 and time averaged vorticity in axis z is plotted in Figures C.36 and C.37. A comparison of the velocity magnitude provided by the ARoe solver for two different values of CFL , 0,2 and 0,4 is shown in Figure C.31 with the velocity magnitude. It is observed that, as long as the CFL condition is satisfied, there is not any remarkable variation in the numerical results. The ARoe and HLLS solvers are compared in Figure C.32, showing how the magnitude of velocity varies when using both solvers with 1st and 3rd order numerical schemes. It is noticed that HLLS solver is more diffusive than ARoe solver. A very low diffusion of $h\nu$ is observed in the results provided by the ARoe solver, which maintains large gradients of this quantity downstream. Slightly less diffusion can be seen in Figure C.33 as the grid is refined. More realistic structures are observed in Figure C.34 when looking at 3rd order numerical scheme ARoe results, yet without enough diffusion. HLLS solver shows excessive diffusion, which can be seen in the figures of velocity magnitude, where the reattachment length is much smaller than the one provided by ARoe solver given the highest momentum exchange of $h\nu$, and in the picture of the vorticity. A very high diffusion is observed after the sudden expansion on the 1st order solution of the HLLS solver in Figure C.34. As the grid is refined, we can see how 1st order ARoe simulations slightly approach 3rd order vorticity values in Figure C.35. On the other hand, mesh refinement shows almost no difference when using the HLLS solver. The dependency on the order of the scheme is higher for the HLLS solver than it is for the ARoe solver. More uniform values of vorticity are found in the time averaged Figures C.36 and C.37. ARoe solver is used for the simulations in this work, given that ARoe solver is more accurate than HLLS. HLLS solver is very diffusive, even without any physical diffusion.

	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5
Reattachment length	X	4.75	X	4.15	4.4

Tabla C.2: Numerical results for different turbulence configurations showing the obtained reattachment length. Cases with a capital x correspond to cases 1 ($\nu_e = 0 \frac{m^2}{s}$) and 3 ($\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$) which show unsteady flow and recirculation areas at the upper part of the channel. Experimental reattachment length equals to 4.6.

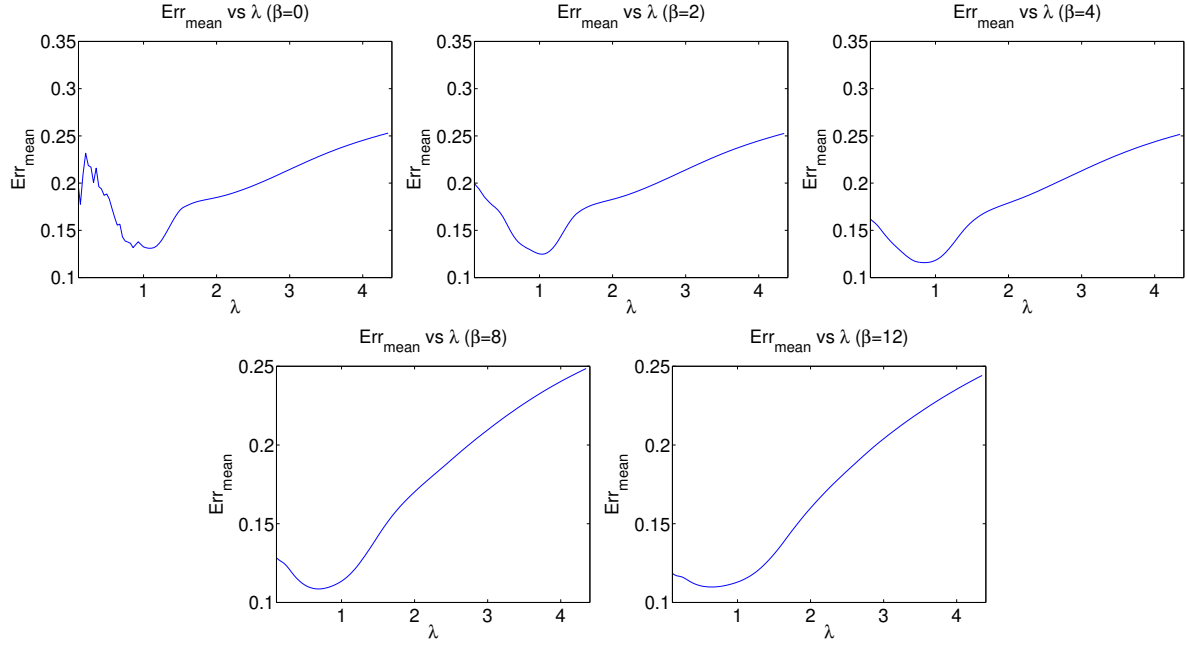


Figura C.15: Plots corresponding to Err_{mean} vs λ for different values of β . 3rd order numerical scheme simulations.

1st order				
Δx	0.1	0.05	0.025	0.0125
Reattachment length	3.95	4.35	4.5	4.45
Err_{mean} in %	16.48	12.98	12.6	13.33

Tabla C.3: Numerical results concerning reattachment length and mean error out of the convergence analysis with mesh refinement.

3rd order				
Δx	0.1	0.05	0.025	0.0125
Reattachment length	4.55	4.45	4.4	4.35
Err_{mean} in %	13.96	13.02	13.92	14.44

Tabla C.4: Numerical results concerning reattachment length and mean error out of the convergence analysis with mesh refinement.

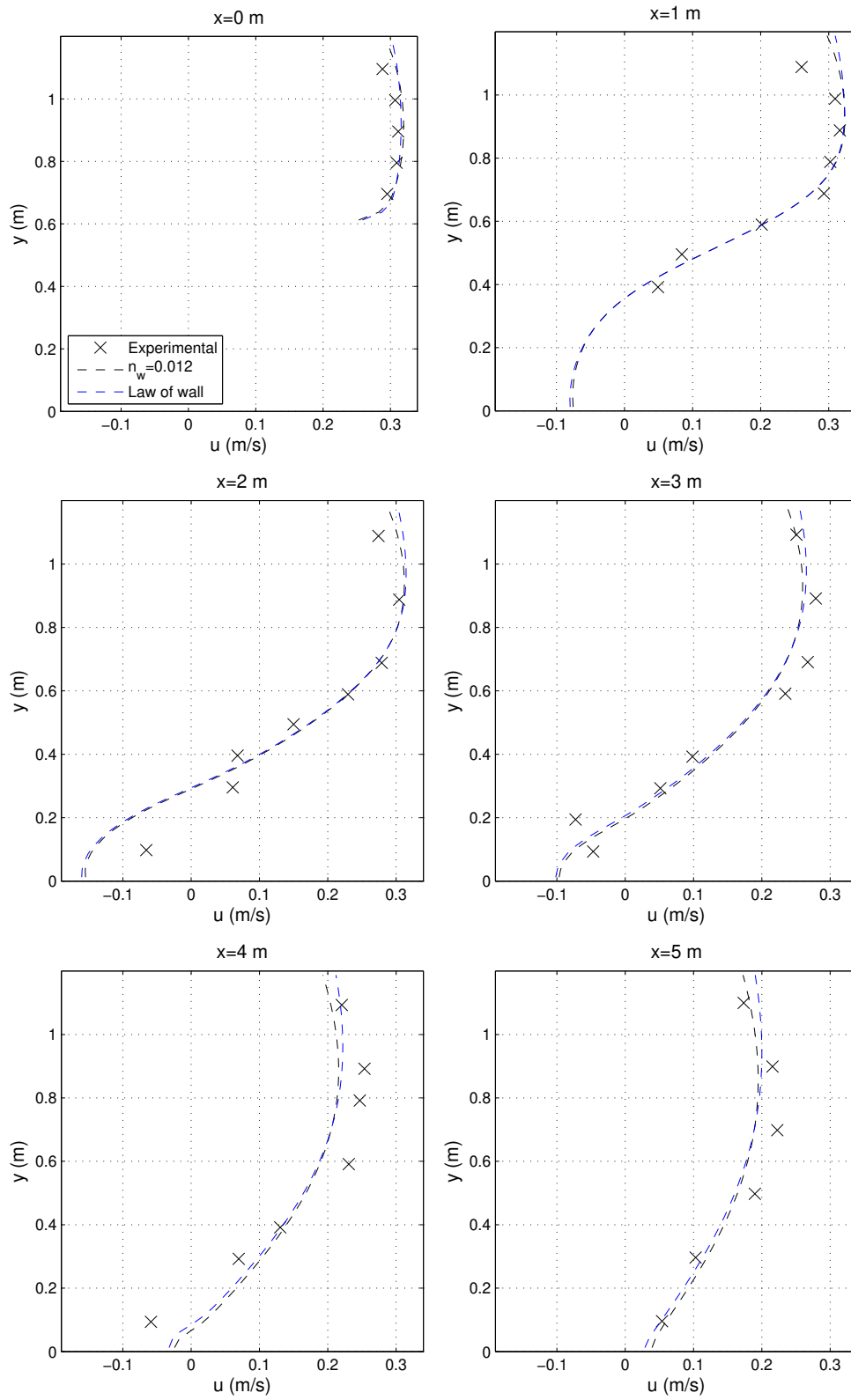


Figura C.16: Comparison of two different ways of computing \mathbf{S}_f within the SWE. 3rd order numerical scheme.

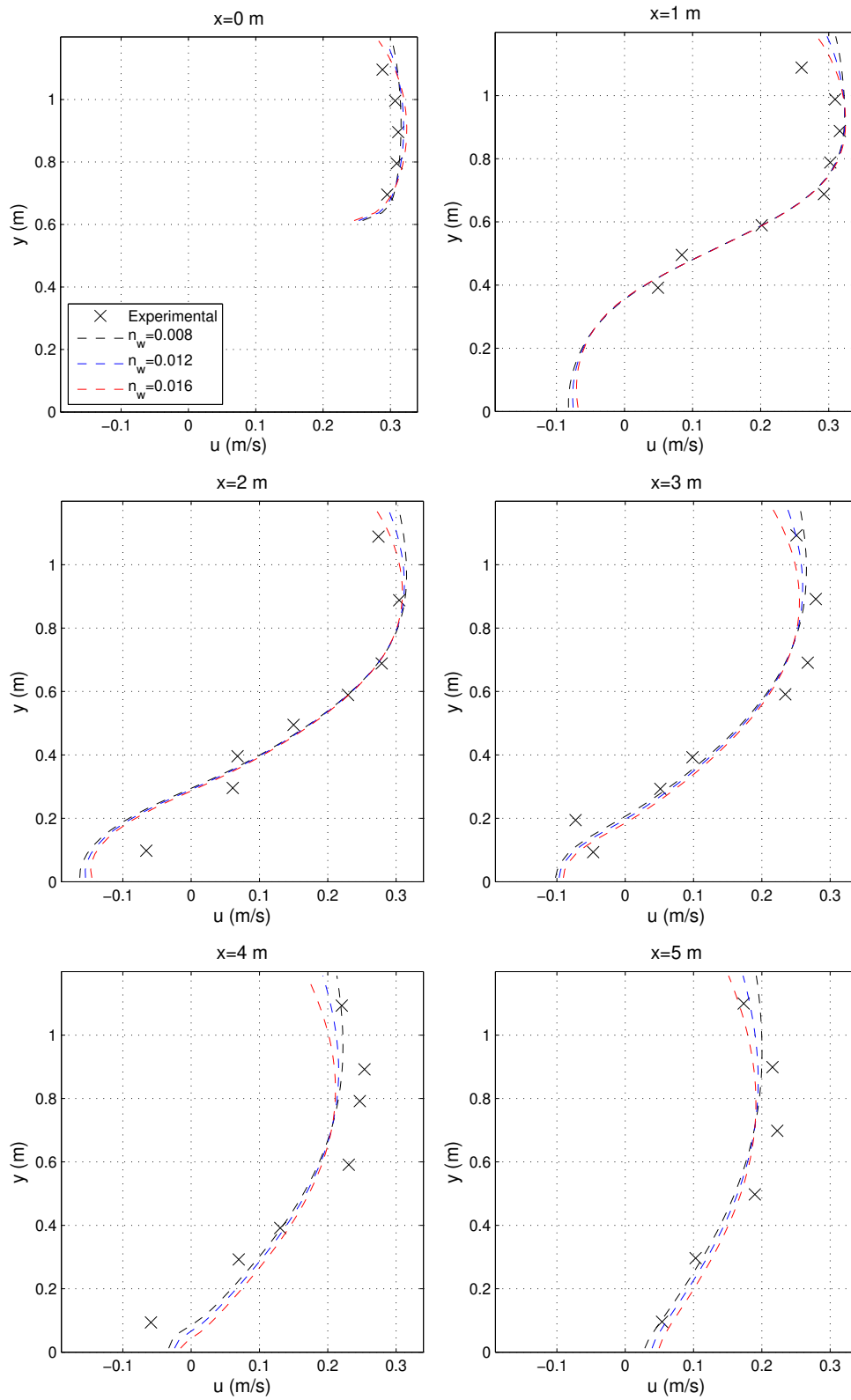


Figura C.17: Set of velocity profiles for different values of n_w . 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025$ m, $\lambda = 1,3$, $\beta = 7$, $y_w/4$.

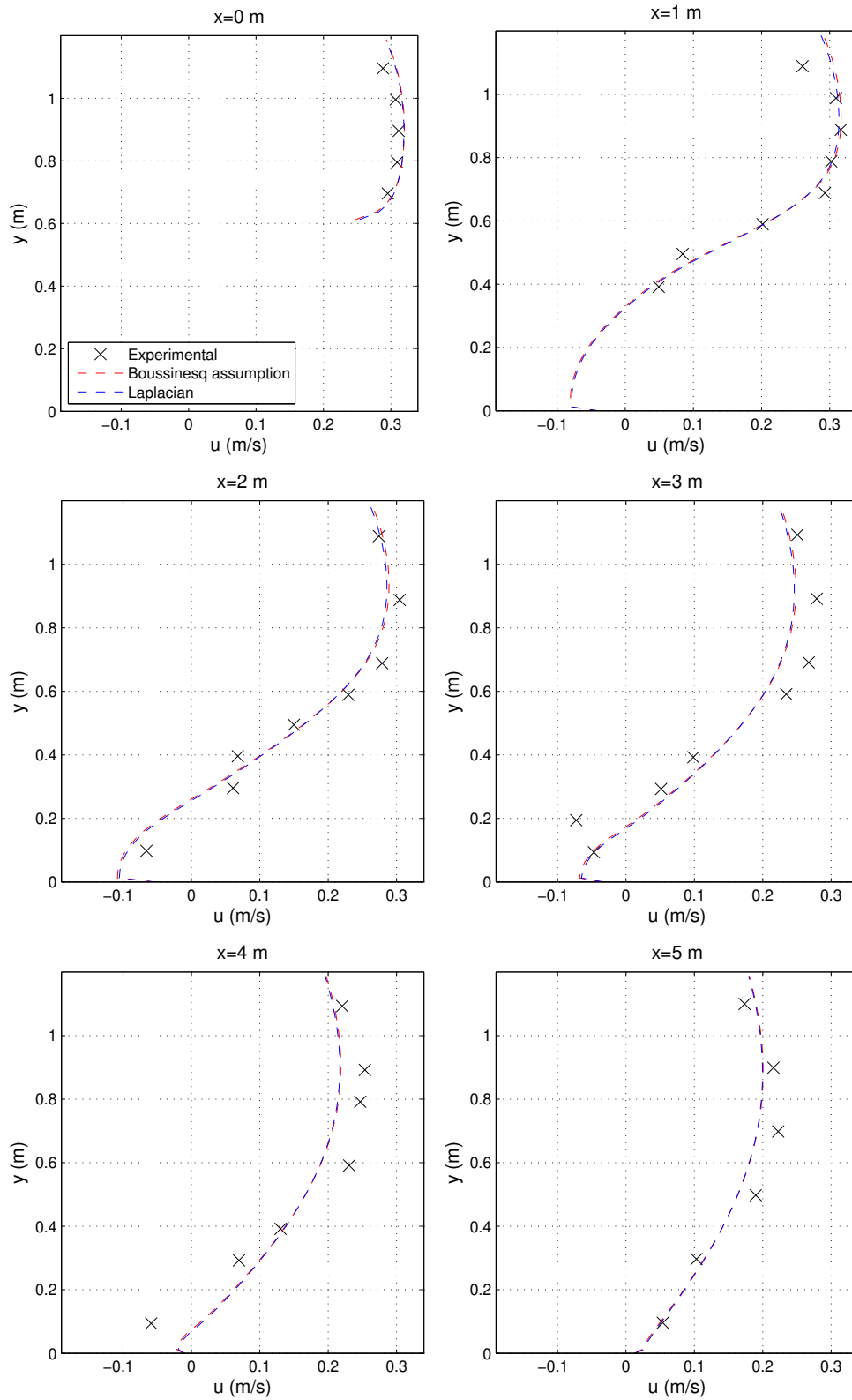


Figura C.18: Comparison of two different ways of computing \mathbf{D}_i , through the Boussinesq assumption and a simplified form of it (A.35). Both correspond to the same parameter configuration. 1st order numerical scheme.

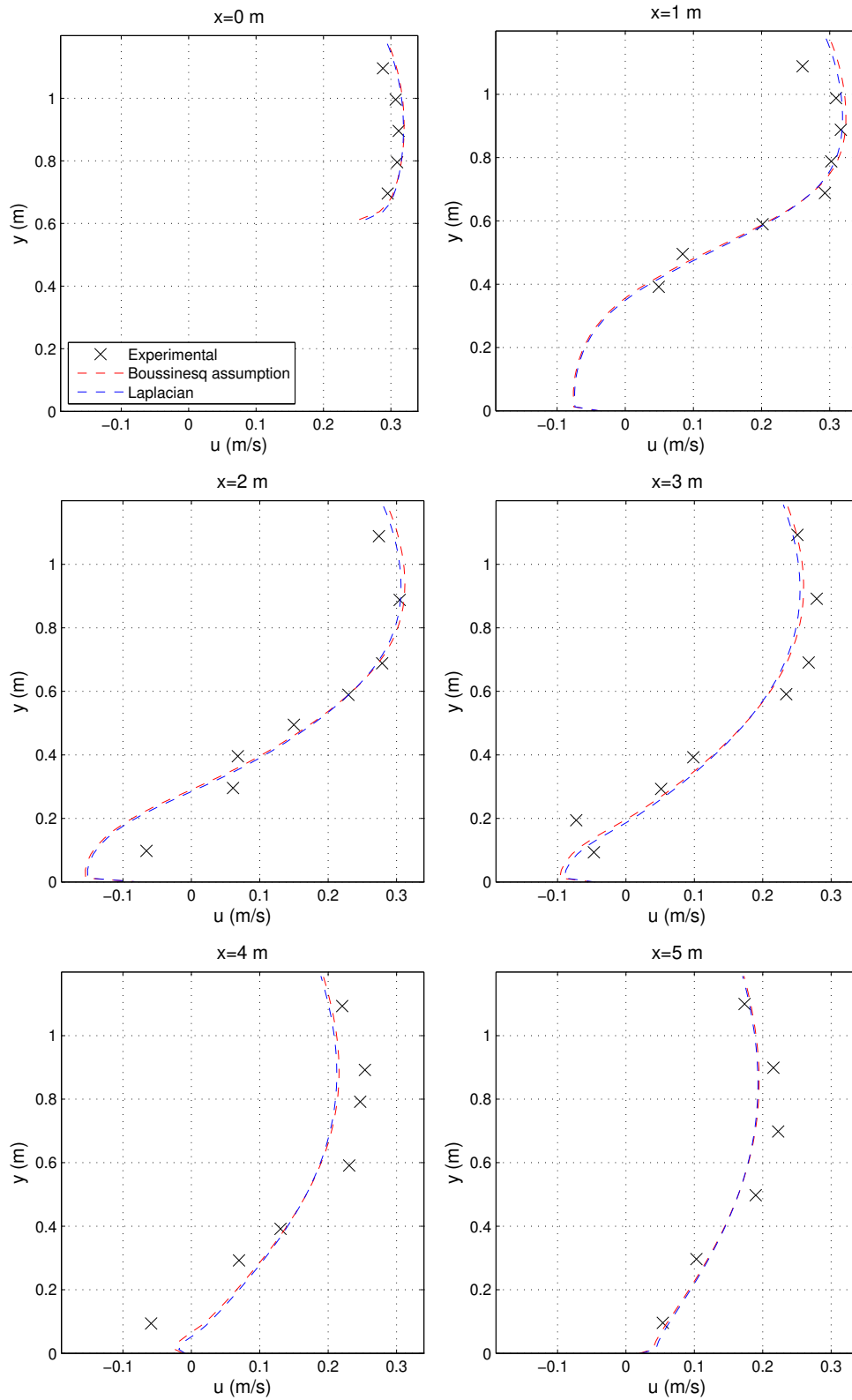


Figure C.19: Comparison of two different ways of computing \mathbf{D}_i , through the Boussinesq assumption and a simplified form of it (A.35). Both correspond to the same parameter configuration. 3rd order numerical scheme.

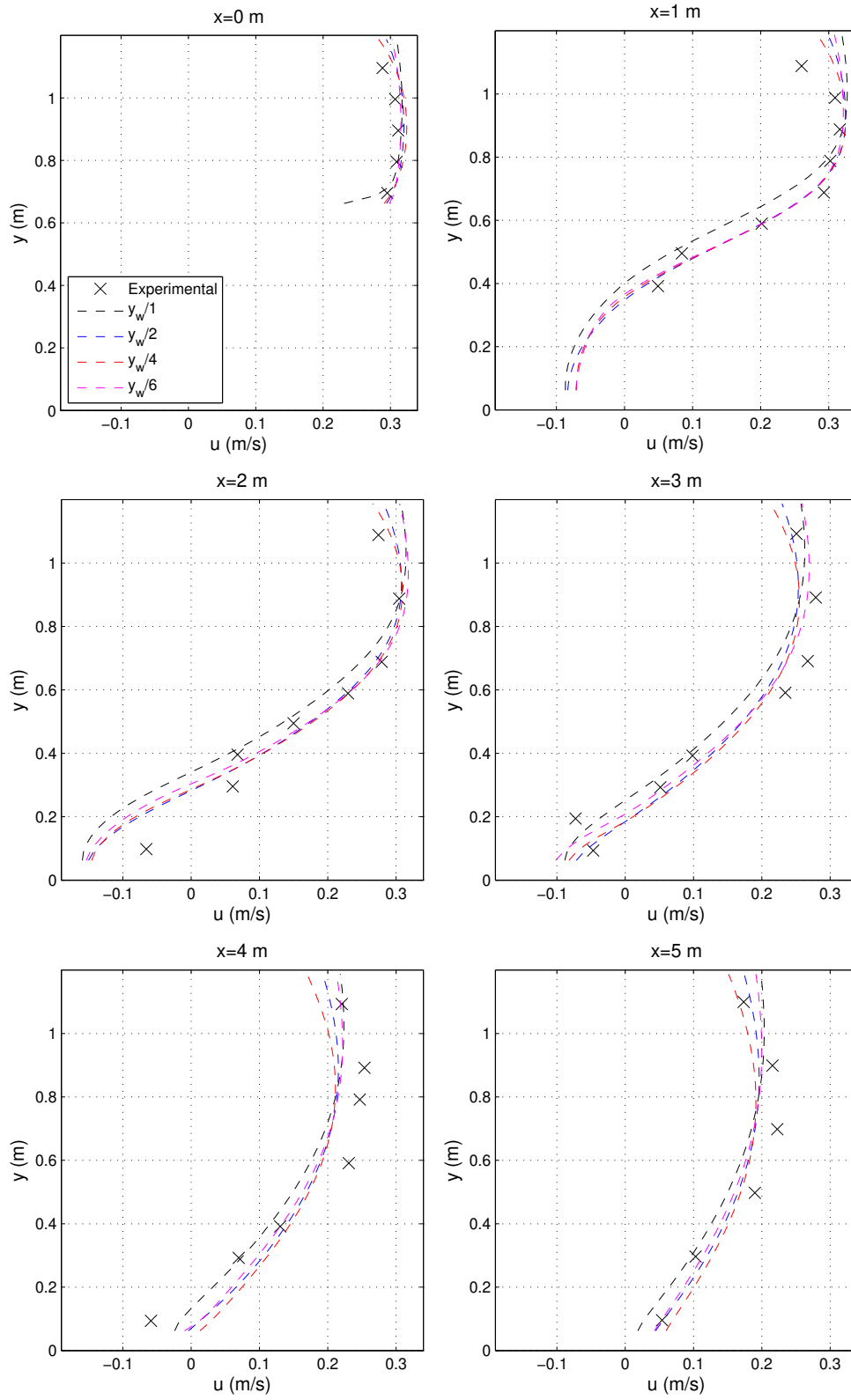


Figura C.20: Set of velocity profiles for different values y_w is divided by. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025$ m, $\lambda = 1,3$, $\beta = 7$, $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$.

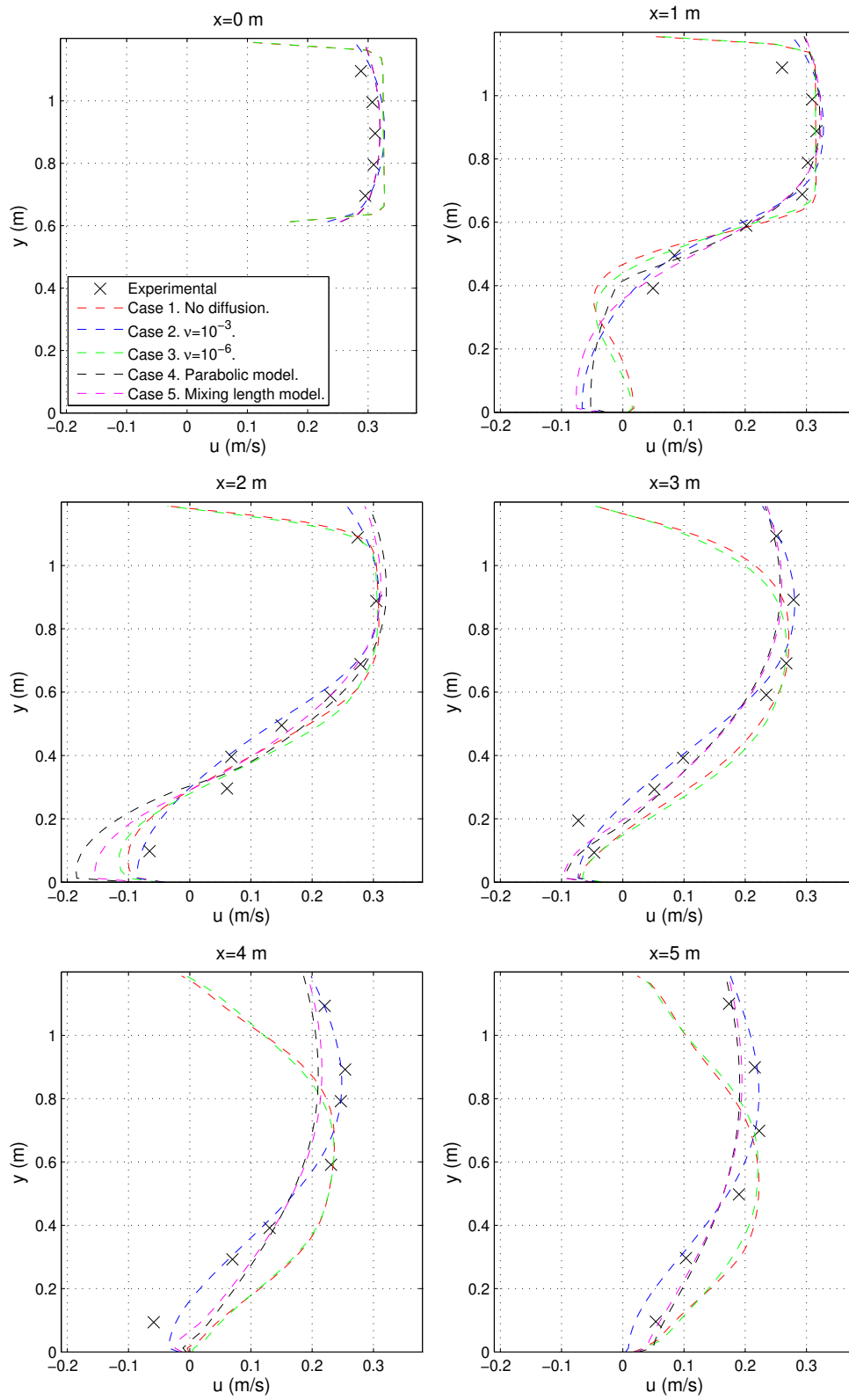


Figura C.21: Set of velocity profiles for five different turbulence configurations. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025$ m.

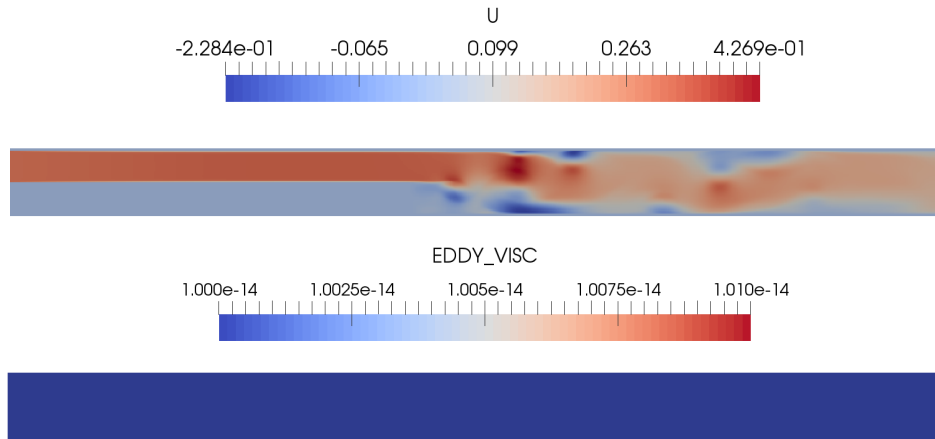


Figura C.22: Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 1 turbulence configuration corresponding to nil diffusion. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$.

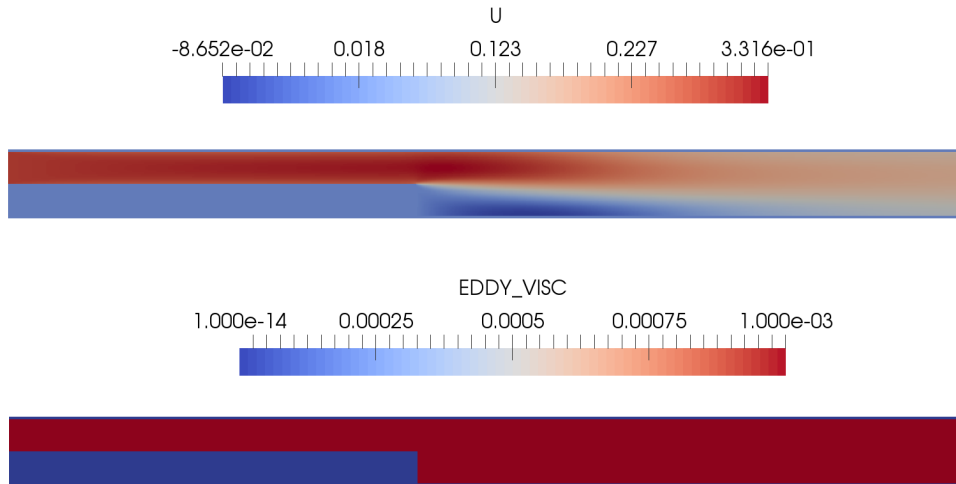


Figura C.23: Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 2 turbulence configuration corresponding to $\nu_e = 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$.

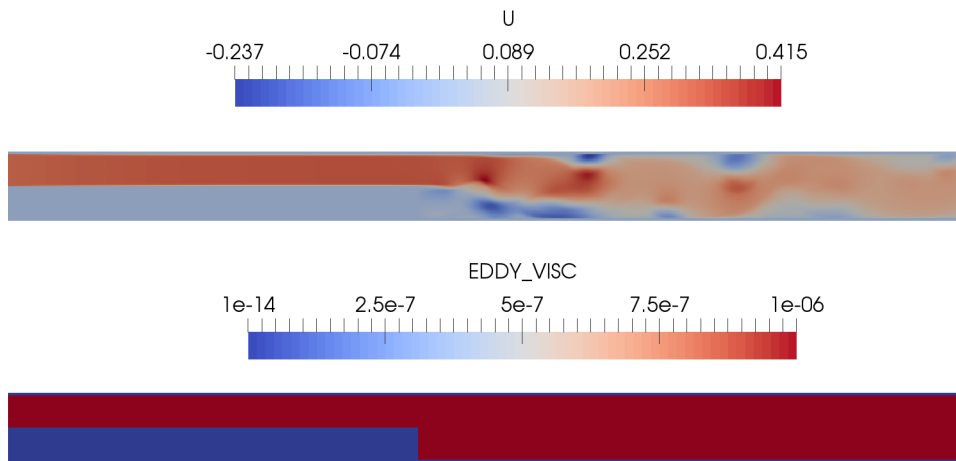


Figura C.24: Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 3 turbulence configuration corresponding to $\nu_e = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$.

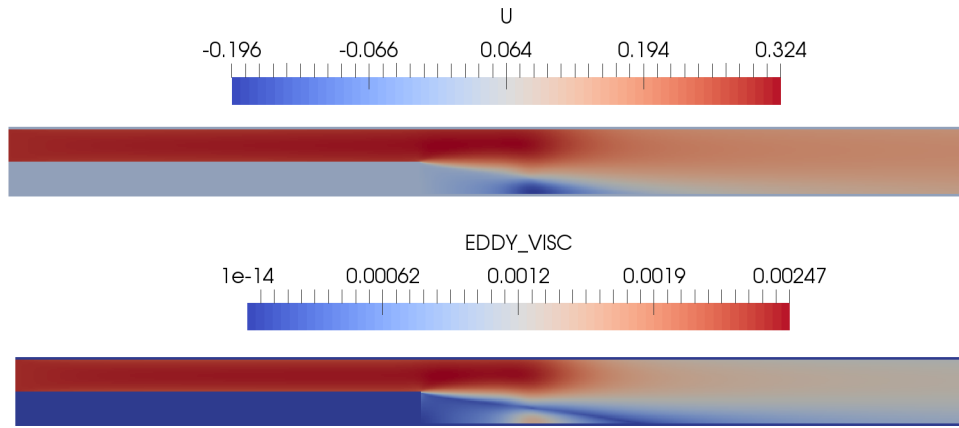


Figura C.25: Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 4 turbulence configuration corresponding to the parabolic eddy viscosity model. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$.

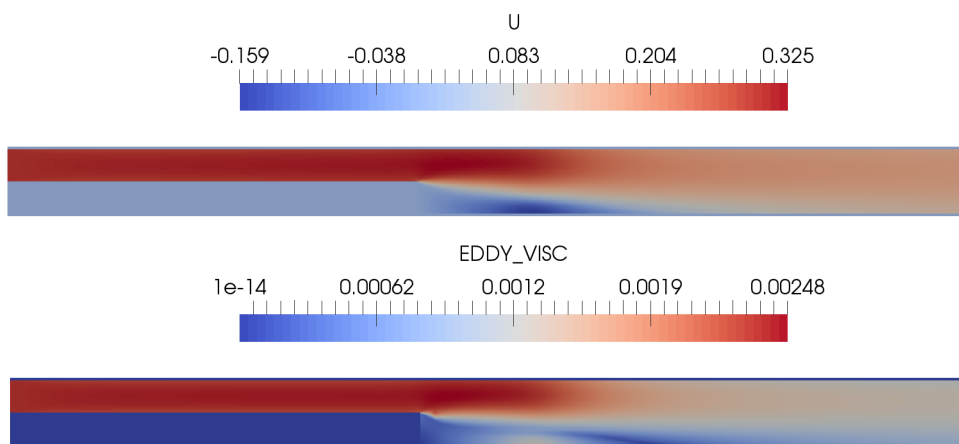


Figura C.26: Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 5 turbulence configuration corresponding to the mixing length model. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 \text{ m}$.

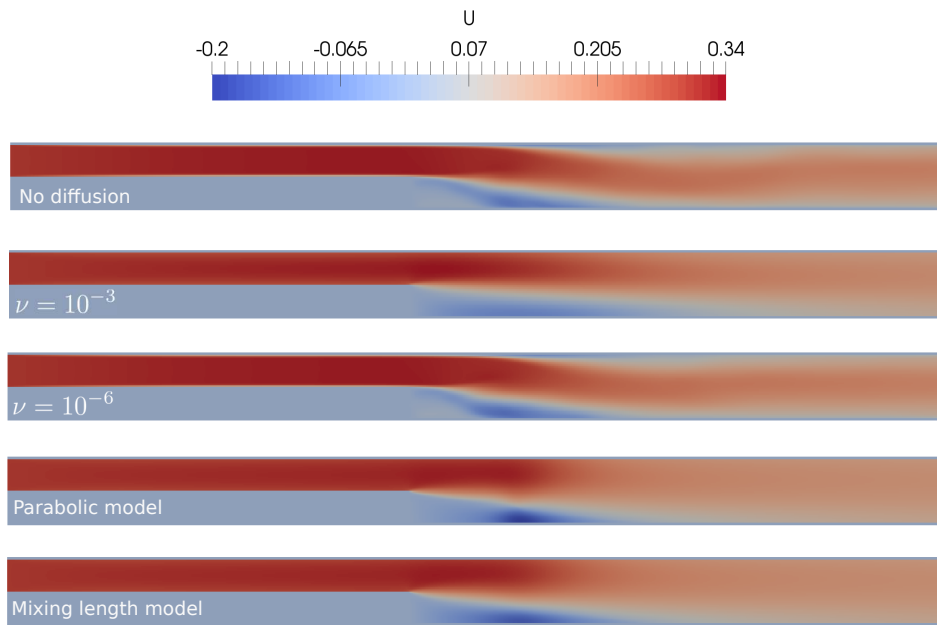


Figura C.27: Time-averaged horizontal velocity representations for the 5 different turbulence configurations. From top to bottom, no diffusion, $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$, $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$, parabolic eddy viscosity model and mixing length model.

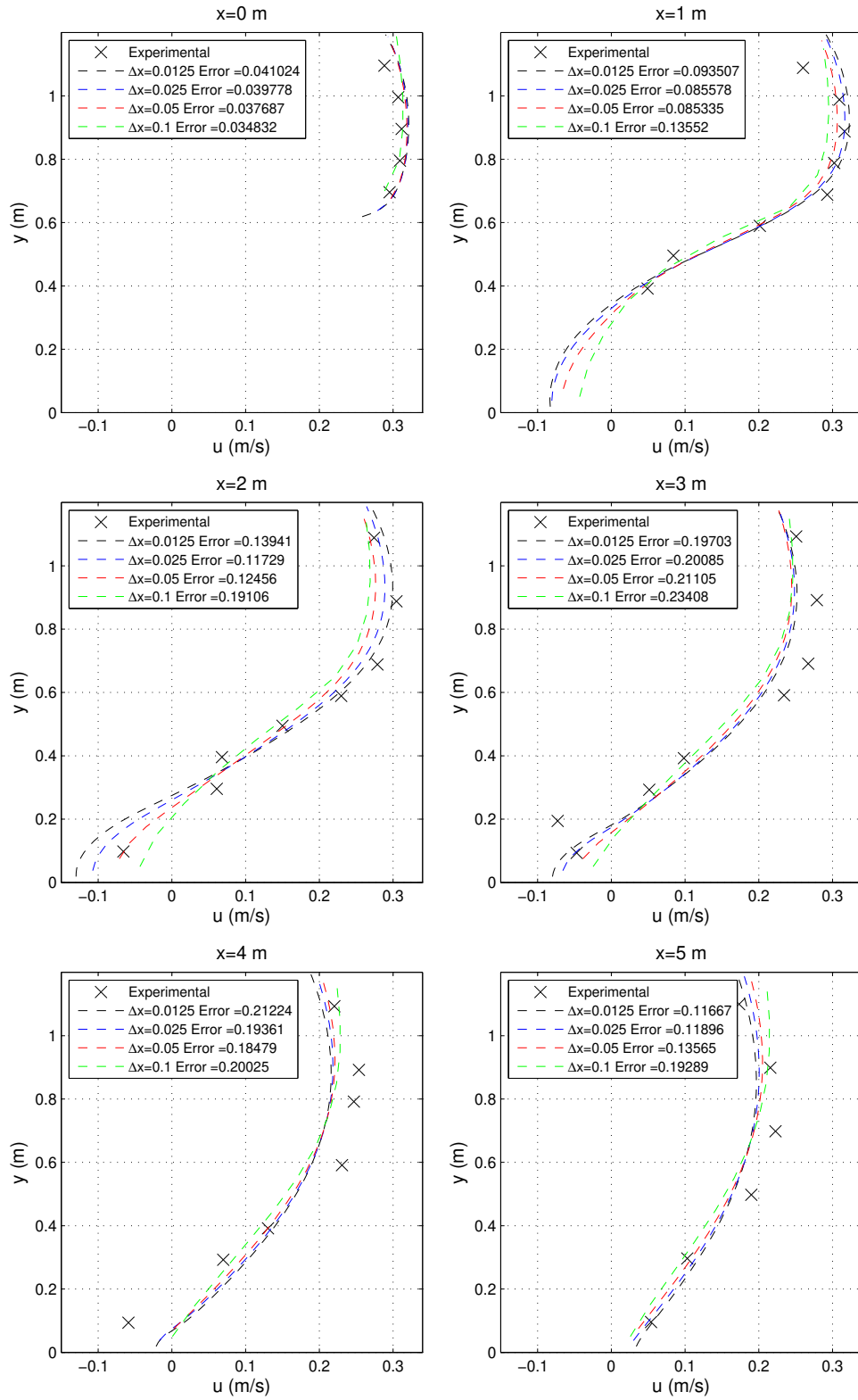


Figure C.28: Set of velocity profiles for three different cell sizes. 1st order numerical scheme results.

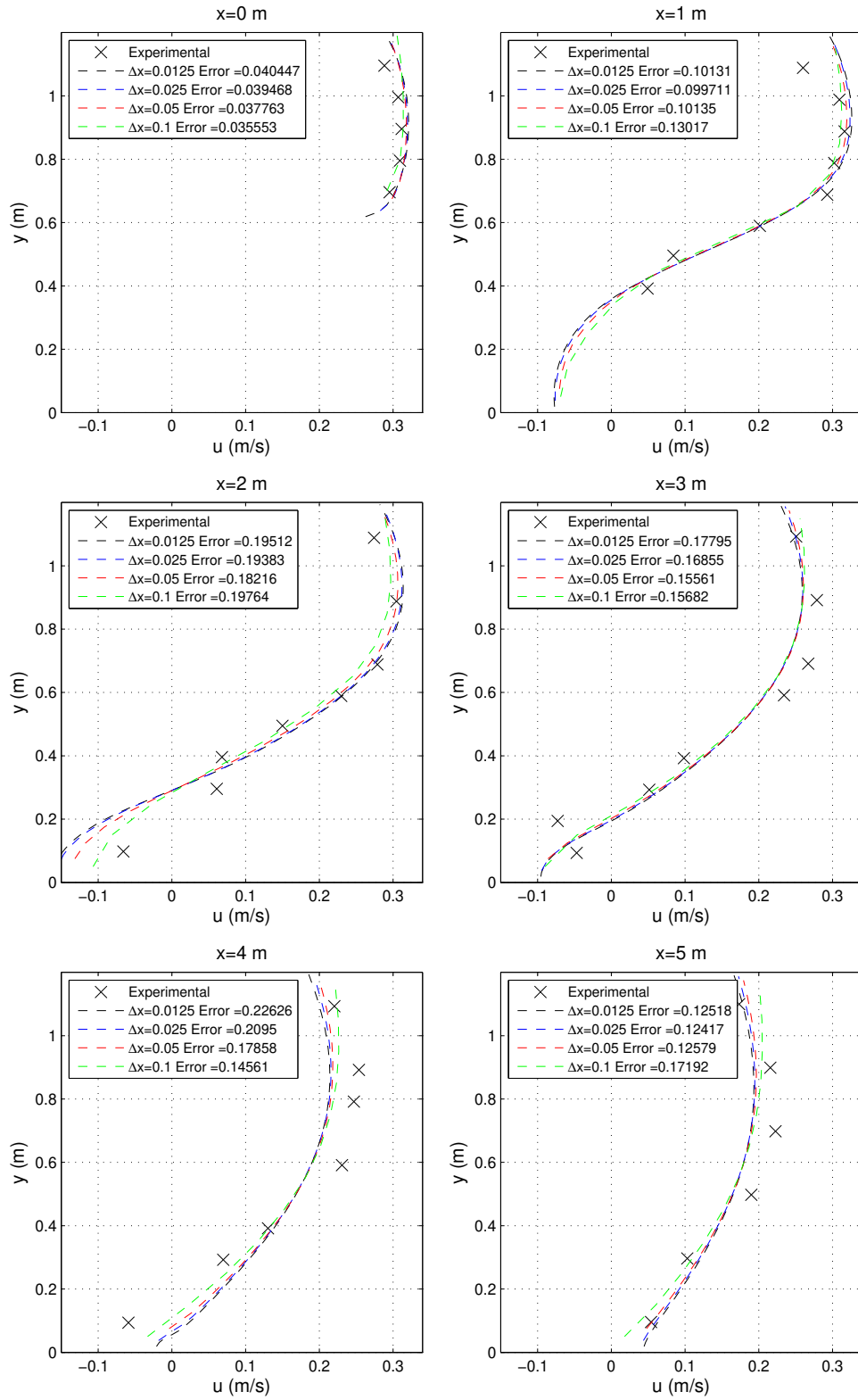


Figure C.29: Set of velocity profiles for three different cell sizes. 3rd order numerical scheme results

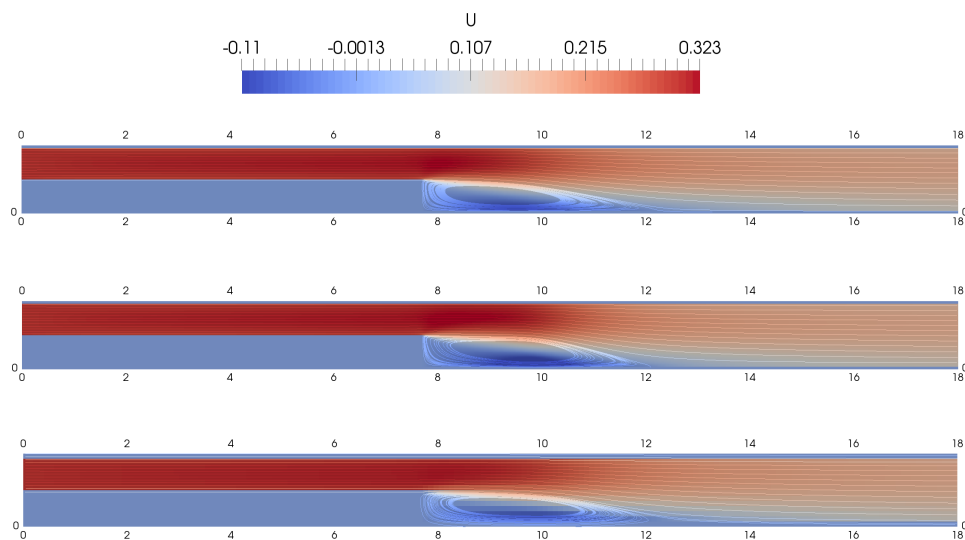


Figura C.30: Set of velocity fields for three different configurations. From top to bottom, 1st order $\Delta x = 0,025 \text{ m}$, 3rd order $\Delta x = 0,025 \text{ m}$ and 3rd order $\Delta x = 0,1 \text{ m}$.

The matlab script to carry out the error calculus is also shown next.

```

1 %Variar ruta en línea 5, 32, 80 y 106,108 para cada caso.
2 clear all
3 close all
4 list=dir('./exp_files/*.dat');
5 list2=dir('./numerical_results/LHS_12/*.dat');
6 R=3;
7 for t=1:size(list2,1)
8 E_g=0.0;
9 E_t=0.0;
10 E_denom=0.0;
11 Time=0.0;
12 for i=1:size(list,1)
13     data1=dlmread(strcat('./exp_files/',list(i).name));
14     list(i).name
15     figure('Position', [0 0 400 400]);
16     hold on;
17     box on;
18     set(gca,'layer','top','FontSize',10);
19     grid on;
20     if i == 1
21         ylim([0 1.2])
22         xlim([-0.15 0.35])
23     else
24         ylim([0 1.2])
25         xlim([-0.15 0.35])
26     end
27     hXLabel = xlabel('u (m/s)', 'FontSize', 12);
28     hYLabel = ylabel('y (m)', 'FontSize', 12);
29     y_val1=data1(:,2);
30     u_val1=data1(:,1);
31     plot(u_val1,y_val1,'x','MarkerSize',11,'MarkerEdgeColor','k')
32     data2=dlmread(strcat('./numerical_results/LHS_12/',list2(t).name));
33     long=length(data2);
34     R=1;
35     if i == 1
36         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
37         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
38         txt = strcat('x=0 m');
39     elseif i == 2
40         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
41         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
42         txt = strcat('x=1 m');
43     elseif i == 3
44         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
45         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
46         txt = strcat('x=2 m');
47     elseif i == 4
48         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
49         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
50         txt = strcat('x=3 m');
51     elseif i == 5
52         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
53         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
54         txt = strcat('x=4 m');
55     else

```

```

56         y_val2=data2(R:long,1)-0.05;
57         u_val2=data2(R:long,4*i-1)./data2(R:long,4*i-2);
58         txt = strcat('x=5 m');
59     end
60     [A,B]=size(y_val1);
61     %%%%%%%%%%%%%Cálculo del error
62     for j=1:A
63         distance=abs(y_val2-y_val1(j));
64         [M,Position]=min(distance);
65         Error= (u_val2(Position) - u_val1(j))^2;
66         E_t = E_t + Error;
67         E_denom = E_denom + (u_val1(j))^2
68     end
69     E_t = sqrt(E_t/E_denom)
70     %%%%%%%%%%%%%
71     plot(u_val2,y_val2, 'Color','b')
72     if i == 1
73         text(-0.08,0.5, strcat('Error = ',num2str(E_t)), 'FontSize', 10)
74         legend('Measured','Numerical simulation','Location','southwest'
75             )
76     else
77         text(-0.08,0.5, strcat('Error = ',num2str(E_t)), 'FontSize', 10)
78     end
79     title({txt}, 'FontSize', 12);
80     hold off;
81     filename = strcat('comparisons/LHS_12/',list2(t).name,'_',num2str(i
82         -1),'.eps');
83     set(gcf, 'PaperPositionMode','auto');
84     print('-depsc2',filename);
85     E_g=E_g+E_t;
86     E_t=0;
87     E_denom=0;
88 end
89 E_g/6
90 error_global(t)=E_g/6;
91 close all
92 end
93 for d=1:size(list2,1)
94     if Time < 400
95         lambda(d) = 0.1;
96     else
97         lambda(d) = 0.1 + 1.8/500 * (Time - 400);
98     end
99     Time = Time + 10;
100 end
101 figure(1);
102 hold on;
103 box on;
104 set(gca, 'layer', 'top', 'FontSize', 25);
105 xlim([0.11 4.4])
106 hXLabel = xlabel('\lambda', 'FontSize', 25);
107 hYLabel = ylabel('Err_{mean}', 'FontSize', 25);
108 plot(lambda,error_global)
109 title('Err_{mean} vs \lambda (\beta=12)', 'fontsize', 25);
110 hold off;
111 print('LHS_12', '-depsc');

```

```

111 plot(error_global)
112 plot(lambda,error_global)
113 [min,posmin]=min(error_global)
114 list2(posmin).name

```

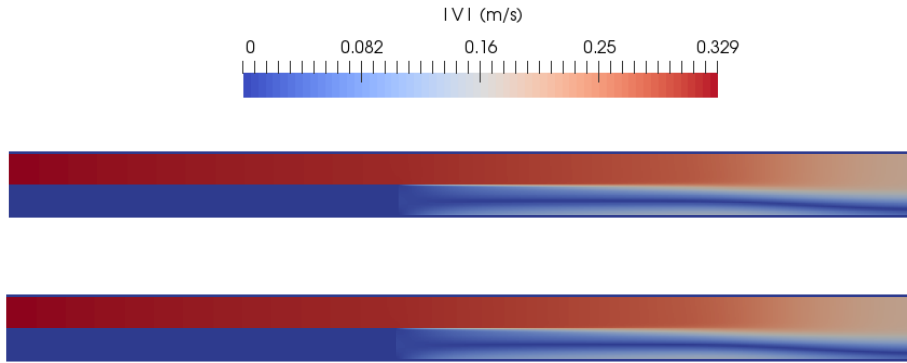


Figura C.31: From top to bottom. $CFL = 0,4$ and $CFL = 0,2$. Velocity magnitude. ARoe Riemann solver. Time averaged pictures.

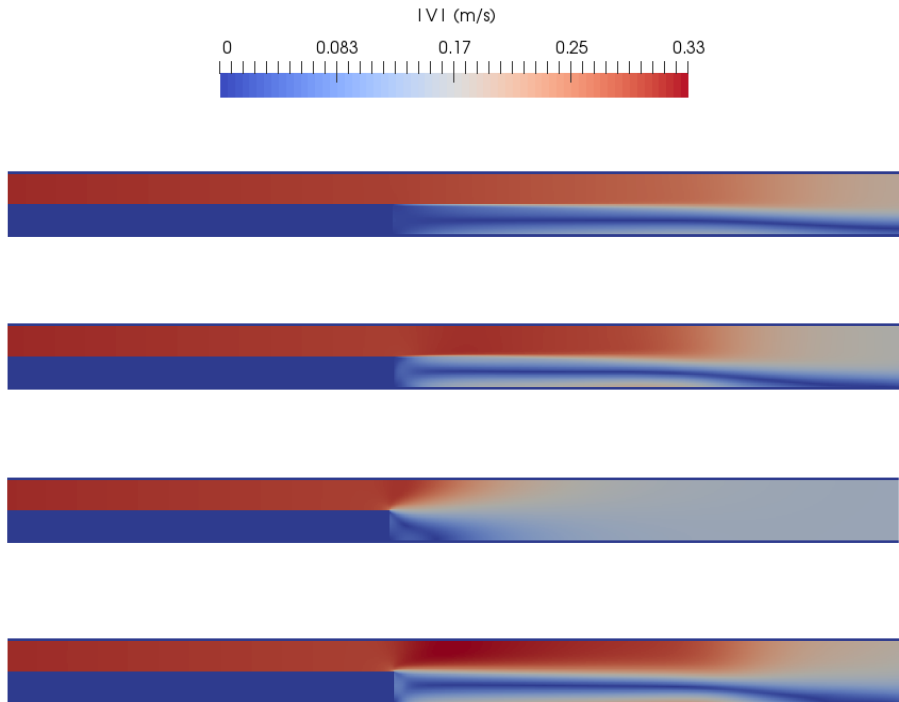


Figura C.32: From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Velocity magnitude. Time averaged pictures.

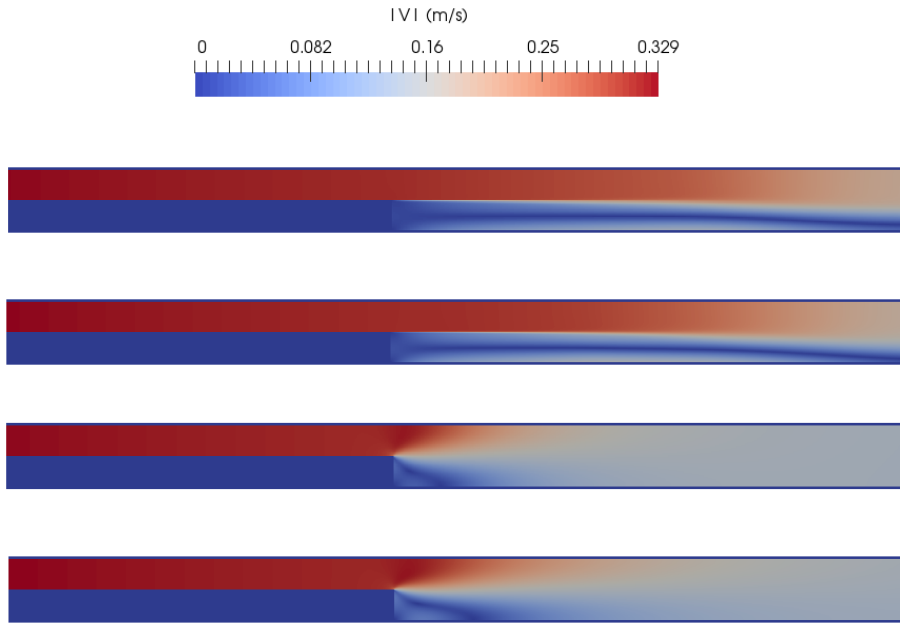


Figura C.33: From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme. Velocity magnitude. Time averaged pictures.

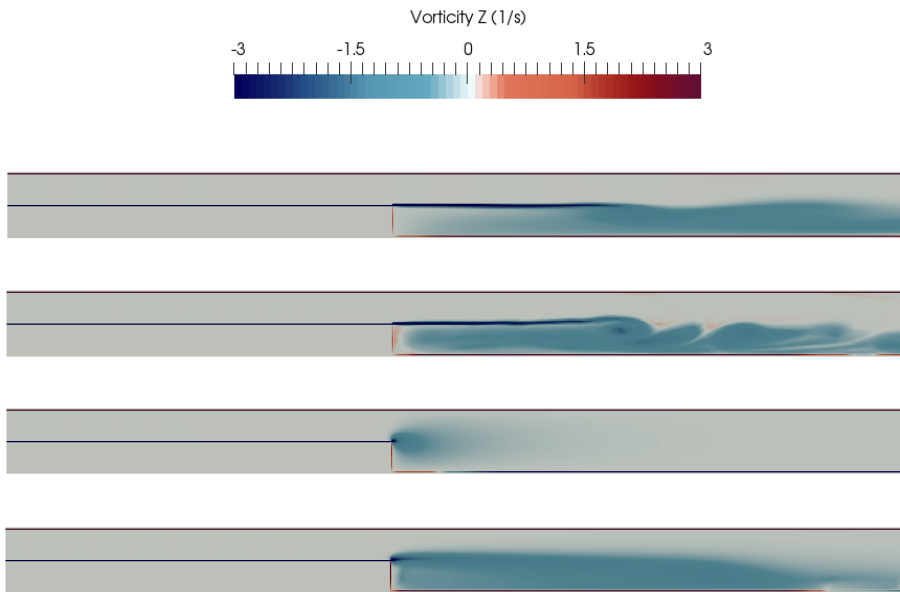


Figura C.34: From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Vorticity in z axis. Instantaneous pictures.

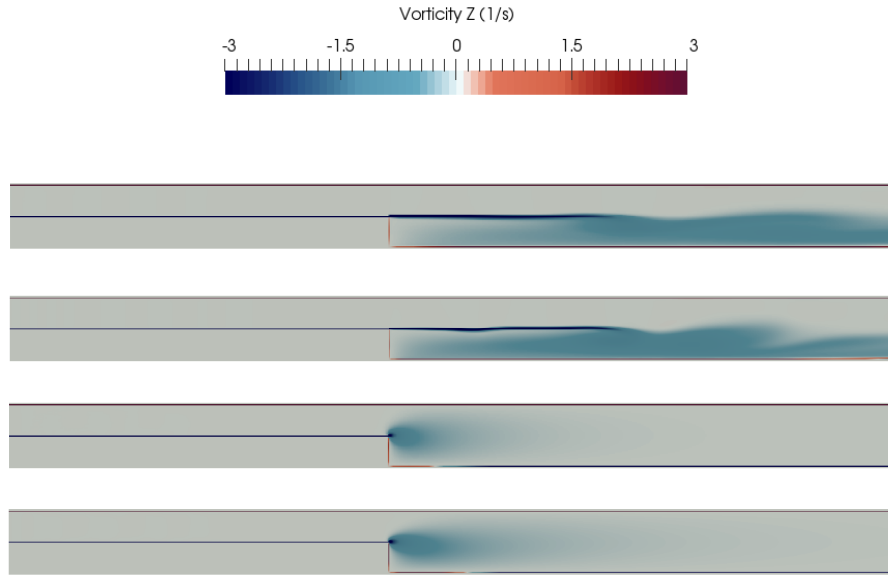


Figura C.35: From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026 m$ and $\Delta x = 0,013 m$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026 m$ and $\Delta x = 0,013 m$ 1st order scheme. Vorticity in z axis. Instantaneous pictures.

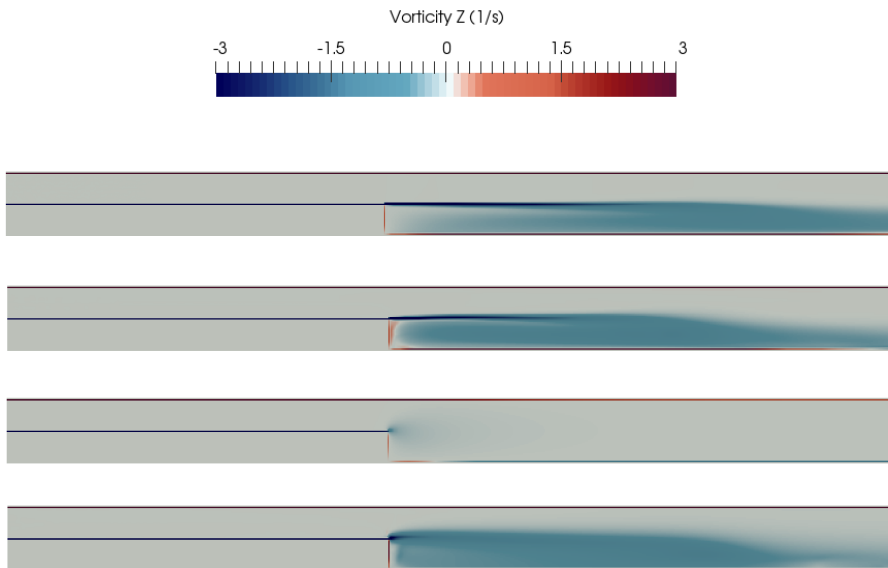


Figura C.36: From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Vorticity in z axis. Time averaged pictures.

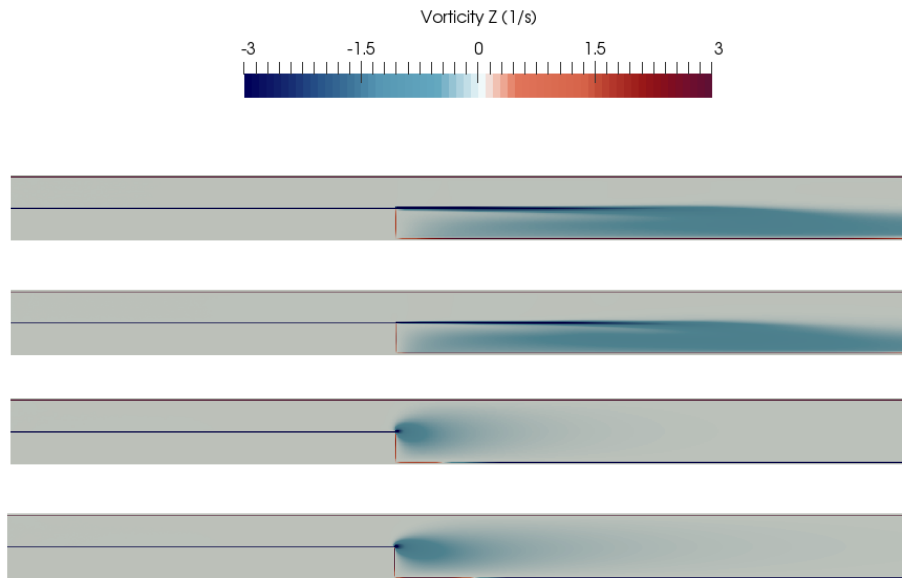


Figura C.37: From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026 \text{ m}$ and $\Delta x = 0,013 \text{ m}$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026 \text{ m}$ and $\Delta x = 0,013 \text{ m}$ 1st order scheme. Vorticity in z axis. Time averaged pictures.

C.4. Experimental validation 2: T-branching channel

A more complex experimental case to be solved by using the explained turbulence models in Section 2.3 is considered. It consists of a T-branching channel, depicted in Figure D.2, in which a flow enters the channel through the upper part right side and splits in two flows. One flow discharges downstream in the main channel and the other discharges in the branch channel downstream. Further details and experimental data available can be consulted in Chapter D. Experimental velocity components u and v were measured in cross sections corresponding to $x = -1,83, -1,037, -0,6344, -0,488, -0,1769, -0,0244, 0,1342$ and $0,5917 \text{ m}$ and $y = -1,525, -0,9882, -0,7625, -0,4453$ and $-0,1769 \text{ m}$. These sections can be seen in Figure E.14. The origin of coordinates is shown in Figure D.1. Figure E.1 also helps to visualize where velocity profiles shown in this section are located. 2D velocity fields were calculated from experimental 3D velocity fields by means of the trapezoid rule, as explained in Section D.2.3. Horizontal velocities in the main channel and vertical velocities in the branch channel are going to be compared with results provided by the simulation models proposed. Experimental data considered concerns the case in which the relative discharge equals to 0,409 (see Table D.1) due to its amount of data available compared to other values of Q_r . The simulation is setup as follows. Three boundary conditions are applied. Upstream in the main channel, $\frac{Q_u}{0,61} = \frac{0,046 \text{ m}^2}{0,61 \text{ s}}$ is set up as a constant unitary discharge along the inlet section and the same is applied downstream in the main channel with a constant unitary discharge $\frac{Q_d}{0,61} = \frac{0,027 \text{ m}^2}{0,61 \text{ s}}$ and downstream in the branch channel with $\frac{Q_b}{0,61} = \frac{0,019 \text{ m}^2}{0,61 \text{ s}}$. Additionally, the same unitary discharges are imposed respectively from the inlet and outlets until the entrance of the branch channel as initial conditions (see Figure C.38). A water depth $h = 0,14213 \text{ m}$ is imposed at $t = 0 \text{ s}$ in the computational domain $\Omega = [0, 6'1915] \times [0, 3'477]$ with a $\Delta x = 0,0305 \text{ m}$. The turbulence model that is used to carry out following simulations is the depth-averaged mixing length model. Steady state is observed from $t = 275 \text{ s}$ approximately. Rest of constants that are not to calibrate are substituted as follows

$$\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (\text{C.36})$$

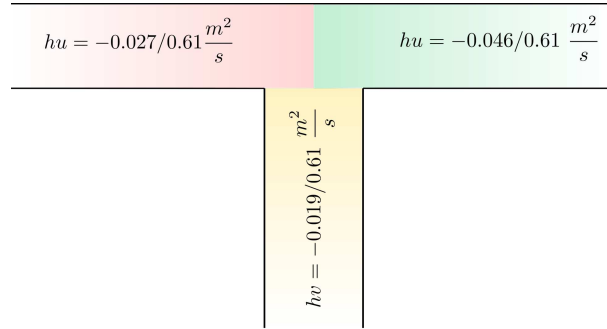


Figura C.38: Picture showing initial conditions for unitary discharge.

A loop has been programmed in order to calibrate the turbulence models. This loop consists of computing λ as

$$\lambda = 0,1 + \frac{1,8}{500} (t - 400) \quad (\text{C.37})$$

at each time step, starting at $t = 400 \text{ s}$ (λ remains as 0,1 before $t = 400 \text{ s}$) until $t = 1600 \text{ s}$. Plots of the mean error expressions (C.41), (C.40) vs λ can be obtained by repeating this loop for different values of $\beta = 0, 2, 4, 8$ and 12. Numerical results for such loops are computed using a 1st order scheme in a $\Delta x = 0,0305 \text{ m}$ mesh and are presented in Figure C.39. From this plots, we can find which values of λ and β fit experimental values the best. A Matlab script appended at the end of this section is used to automate this calibration process for u .

The errors for each velocity profile are computed as

$$Err_j = \sqrt{\frac{\sum (u_i^{sim} - u_i^{exp})^2}{\sum (u_i^{exp})^2}}, \quad (\text{C.38})$$

$$Err_n = \sqrt{\frac{\sum (v_i^{sim} - v_i^{exp})^2}{\sum (v_i^{exp})^2}}, \quad (C.39)$$

where the superscripts *sim* and *exp* stand for numerical and experimental data respectively and Err_j , Err_n stand for the error for each velocity profile when comparing velocities in the x direction and in the y direction. There are as many terms as experimental values of velocity are available for each velocity profile. It is worth mentioning that the x and y locations of the experimental measurements do not exactly coincide with the x and y coordinates of the cell centers of the mesh. Therefore, the closest values of numerical x to every experimental x is selected to calculate the velocity error in (C.38) and analogously with y values.

The overall error in u , accounting for the 8 experimental velocity profiles corresponding to cross sections at $x = -1,83, -1,037, -0,6344, -0,488, -0,1769, -0,0244, 0,1342$ and $0,5917$ m , is calculated as

$$Err_{mean,u} = \frac{\sum_{j=1}^8 Err_j}{8}. \quad (C.40)$$

Analogously, the overall error in v , accounting for the 5 experimental velocity profiles corresponding to cross sections at $y = -1,525, -0,9882, -0,7625, -0,4453$ and $-0,1769$ m , is calculated as

$$Err_{mean,v} = \frac{\sum_{n=1}^5 Err_n}{5}. \quad (C.41)$$

An overall error is also considered for the comparison that is carried out for different grid refinements. It is defined here as

$$Err_{overall} = \frac{\sum_{j=1}^8 Err_j + \sum_{n=1}^5 Err_n}{13}. \quad (C.42)$$

Optimal values around $0,1 \leq \lambda \leq 0,3$ and $4 \leq \beta \leq 8$ can be seen in Figure C.39. $Err_{mean,v}$ is prioritized, given that $Err_{mean,u}$ varies less than $Err_{mean,v}$ with a lower error along the programmed λ loop. A minimum value in $Err_{mean,v}$ is observed for $\beta = 8$, corresponding to λ slightly larger than 0,25. However, the optimal value is not the one corresponding to the minimum $Err_{mean,v}$, but a little bit lower due to the continuous variation of diffusion. Values of $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$ are chosen for numerical simulations from now on to provide a low mean error. It is also noticed that the results are more sensitive to changes in λ than in β .

Analogously to the aforementioned study of λ over the results, another loop has been programmed in order to calibrate the Manning bed coefficient n_b , the other one concerning the friction with the wall remains as $0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$. This loop consists of computing n_b as

$$n_b = 0,008 + \frac{0,012}{1200} (t - 400) \quad (C.43)$$

at each time step, starting at $t = 400$ s (n_b remains as $0,008 \frac{s}{m^{1/3}}$ before $t = 400$ s) until $t = 1600$ s . Plots of the mean error expressions (C.41) and (C.40) vs n_b are obtained. Numerical results for such loop are computed using a 1st order scheme in a $\Delta x = 0,0305$ m mesh and are presented in Figure C.40. From this plots, the lowest error in both errors $Err_{mean,v}$ and $Err_{mean,u}$ is observed for a value of n_b around $0,017 \frac{s}{m^{1/3}}$. Such value is kept from now on.

In order to set up forthcoming simulations, it is worth studying how velocity profiles change as the mesh is refined. Three cases with values of $\Delta x = 0,0305, 0,01525$ and $0,007625$ m are simulated. Velocity profiles of u at eight cross sections in x are presented in Figure C.41 and those corresponding to velocity profiles of v at five cross sections in y can be observed in Figure C.42. Both correspond to steady states after $t = 270s$. In overall, $Err_{mean,u}$ and $Err_{mean,v}$ return values of around 0,13 and 0,32 respectively. Given the low alteration of the outcome from numerical simulations, as can be noticed in Table C.5, a cell size $\Delta x = 0,01525$ m is selected as the best option having in count both, computational time and mean error. It is worth mentioning that the depth-averaging process of 3D experimental velocity fields, explained in Subsection D.2.3, does not include a nil velocity at the bed. If we considered a nil velocity

at the bed, depth-averaged velocities can vary 4,5 %, as can be seen in the comparison test carried out in Section D.3. As this non-slip condition is not being considered when depth-averaging by means of the trapezoid rule, then velocities may be over-predicted. If such condition was had in count, then the experimental velocities observed in Figure C.41 would decrease. The error would also decrease, as these points would be slightly closer to numerical ones.

An overview of the velocity magnitude, comparing experimental and numerical data, is shown in Figure C.43. The configuration is as follows, $\lambda = 0,25$, $\beta = 8$, $\Delta x = 0,007625 \text{ m}$, $n_b = 0,013 \frac{s}{m^{1/3}}$ and $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$. Several facts can be noticed, for example, velocities out of the simulation are higher than experimental 2d ones in the area where the flow is contracted in the branch channel. One reason can be that the recirculation width is over-predicted. Also, even though the magnitude of velocity looks alike in both cases in Figure C.43, vectors seem like bouncing right after the entrance to the branch channel in the experimental results, as they point to the right. This fact could be seen if the perpendicular velocities were compared in the branch channel. Besides, the stagnation point, which was not well caught by experimental data due to the resolution of the velocity field, is now easy to notice in Figure C.43 Right.

Water depth involving both, experimental and numerical results for the same parameter configuration than in the previous paragraph is depicted in Figure C.44. Water depth raises as we move from the branch channel downstream to the main channel upstream and downstream in both cases. Qualitatively, results are alike, having in count that looking at the colour scale they may differ in 1 cm. Besides, a sensitive relation of the initial condition in water depth has been noticed to vary steady state results in water depth.

	$\Delta x = 0,0305 \text{ m}$	$\Delta x = 0,01525 \text{ m}$	$\Delta x = 0,007625 \text{ m}$
$Err_{overall}$	21.046	20.647	21.325

Tabla C.5: Numerical results of $Err_{overall}$ in percentage for different mesh refinements. 1st order numerical scheme provided results.

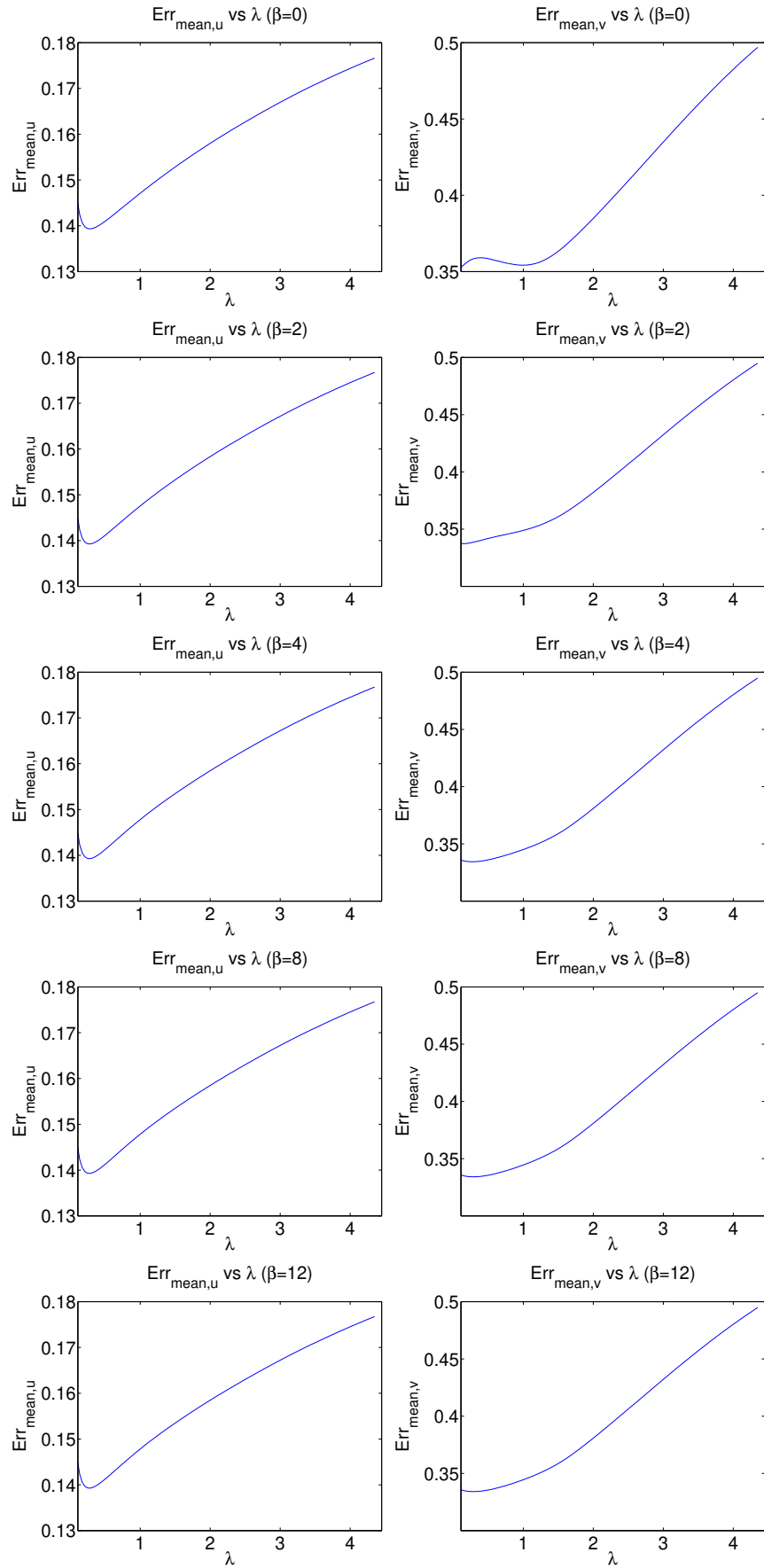


Figure C.39: Plots corresponding to Err_{mean} for u and v vs λ for different values of β . 1st order numerical scheme simulations.

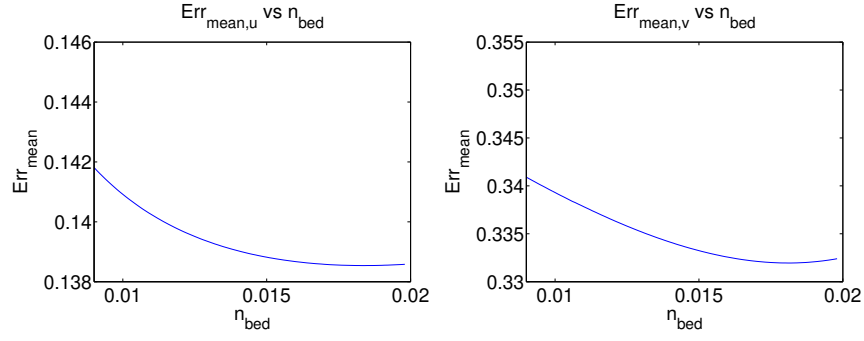


Figure C.40: Plots showing how $Err_{mean,u}$ and $Err_{mean,v}$ vary depending on n_b . 1st order numerical scheme simulations.

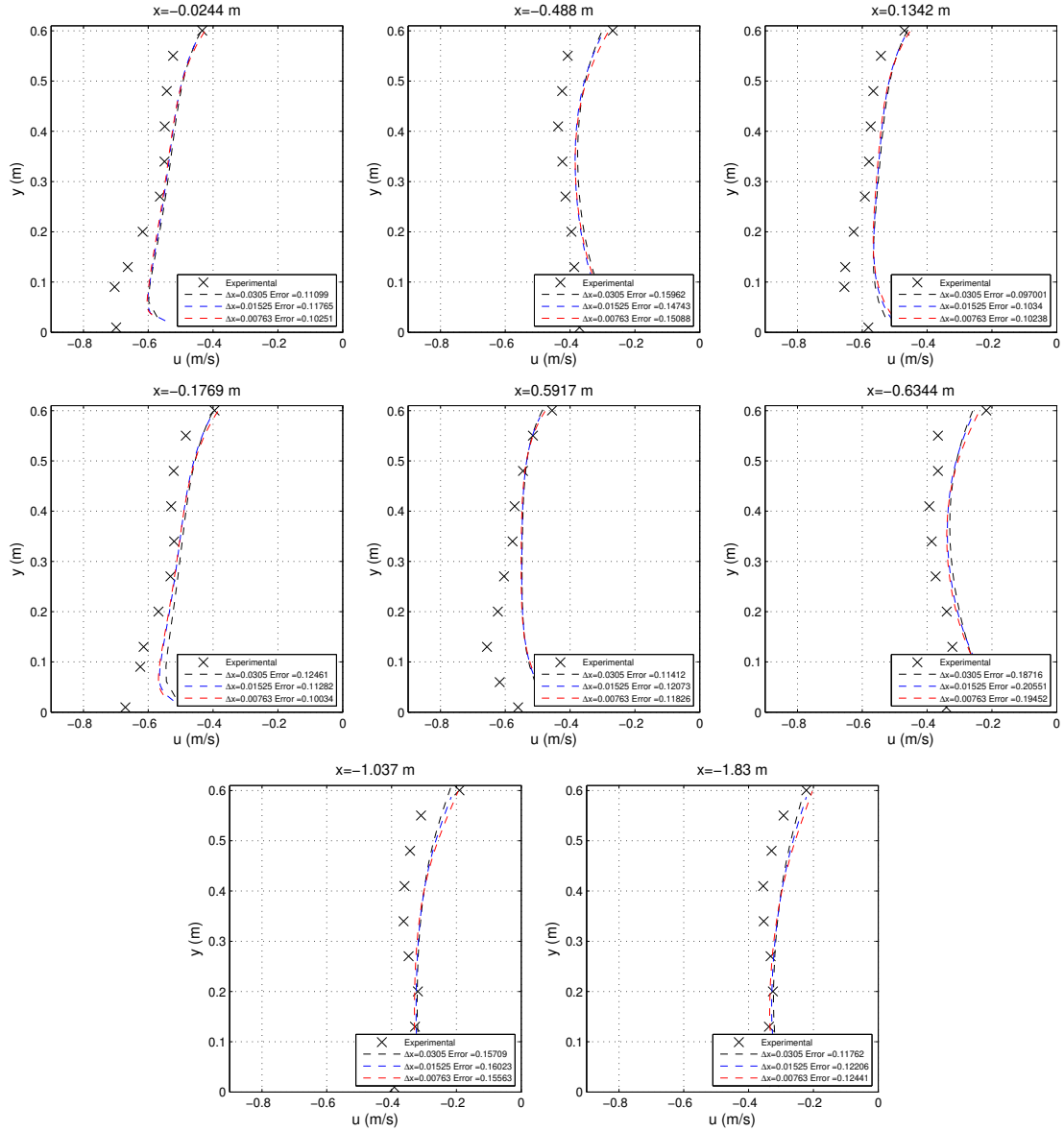


Figure C.41: Comparison plots showing Err_j for cross sections at 8 x coordinates. Results correspond to three mesh refinements. $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. 1st order numerical scheme simulations.

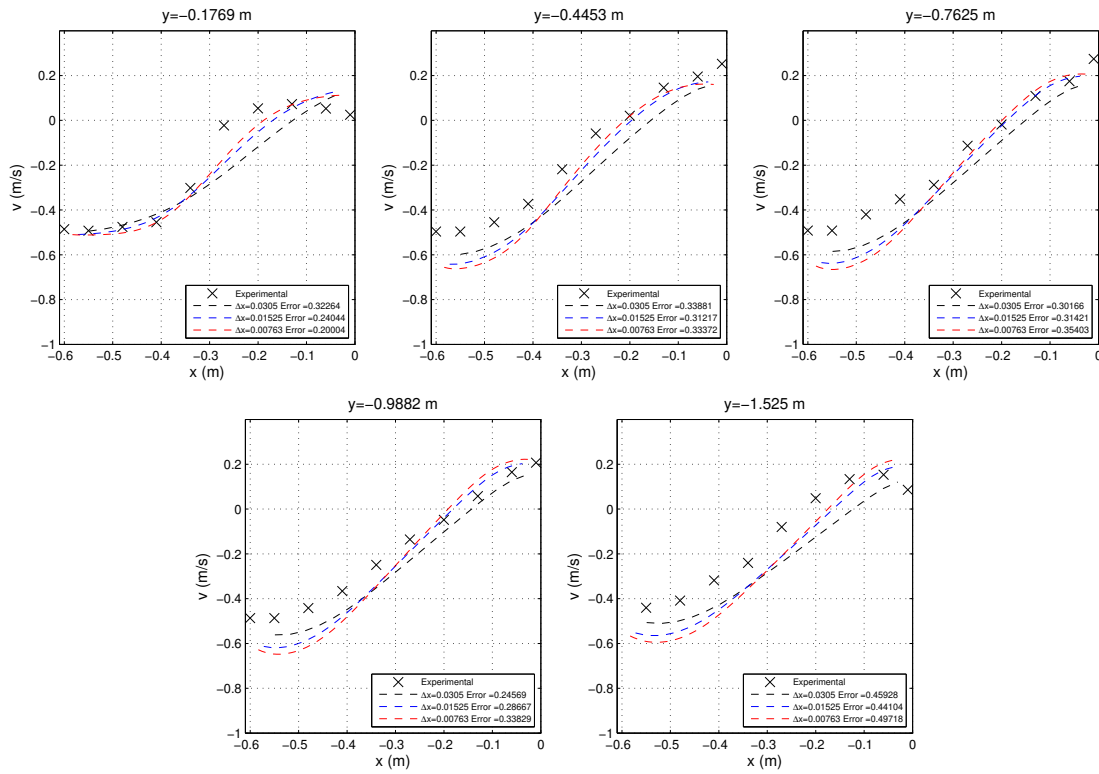


Figure C.42: Comparison plots showing Err_n for cross sections at 5 y coordinates. Results correspond to three mesh refinements. $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. 1st order numerical scheme simulations.

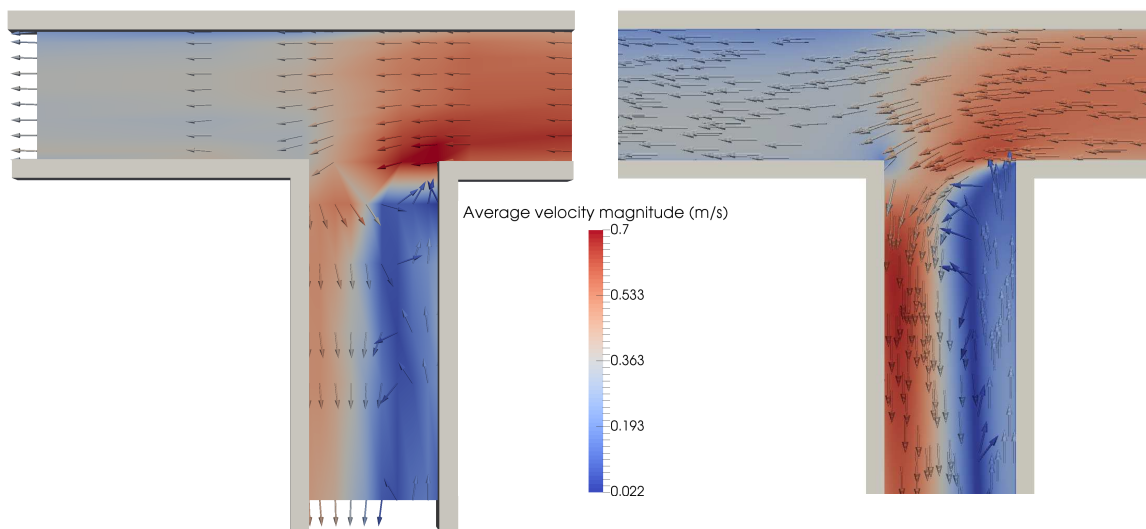


Figure C.43: Left: 2d experimental velocity magnitude field out of the averaging process. Right: 2d numerical velocity magnitude field. 1st order numerical scheme simulation with $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Both pictures share the same presented colour scale.

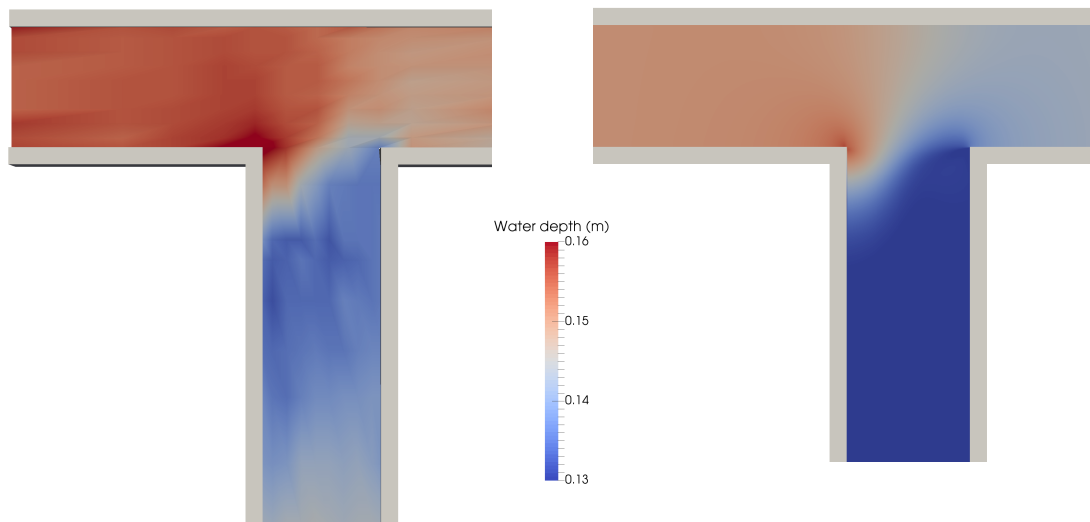


Figura C.44: Left: Experimental water depth. Right: Numerical water depth. 1st order numerical scheme simulation with $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Both pictures share the same presented colour scale.

```

1 clear all
2 close all
3 %variar 7, 23, 91 y 117
4 %Listamos los archivos experimentales, x es varía en x
5 list=dir('./2d_files/y/*.dat');
6 %Listamos los archivos de la simulación, x es varía en x
7 list2=dir('./Numerical_results/LHS_12/y/*.dat');
8 Time=0.0;
9 %Recorre el for tantas veces como volcados temporales existan de todas
  las secciones.
10 for t=1:size(list2,1)
11 E_g=0.0;
12 E_t=0.0;
13 E_denom=0.0;
14 %Recorre el for tantas veces como secciones 2_d "experimentales" en x
  existan.
15 for i=1:size(list,1)
16     %Lectura global de datos de sección experimental.
17     data1=dlmread(strcat('./2d_files/y/',list(i).name));
18     list(i).name
19     p_val1=data1(:,1); %Lectura de coordenadas experimentales
20     u_val1=data1(:,2); %Lectura de velocidades u experimentales
21     v_val1=data1(:,3); %Lectura de velocidades v experimentales
22     %Lectura global de datos de secciones de la simulación.
23     data2=dlmread(strcat('./Numerical_results/LHS_12/y/',list2(t).name)
24 );
25     L=112;
26     R=93;
27     if i == 1
28         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
29         u_val2=data2(R:L,3*i);
30         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
31         Title_section=strcat('x=-0.0244 m');
32     elseif i == 2
33         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
34         u_val2=data2(R:L,3*i);
35         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
36         Title_section=strcat('x=-0.488 m');
37     elseif i == 3
38         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
39         u_val2=data2(R:L,3*i);
40         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
41         Title_section=strcat('x=0.1342 m');
42     elseif i == 4
43         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
44         u_val2=data2(R:L,3*i);
45         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
46         Title_section=strcat('x=-0.1769 m');
47     elseif i == 5
48         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
49         u_val2=data2(R:L,3*i);
50         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
51         Title_section=strcat('x=0.5917 m');
52     elseif i == 6
53         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
54         u_val2=data2(R:L,3*i);
55         v_val2=data2(R:L,3*i+1)

```

```

55         Title_section=strcat('x=-0.6344 m');
56     elseif i == 7
57         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
58         u_val2=data2(R:L,3*i);
59         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
60         Title_section=strcat('x=-1.037 m');
61     else
62         y_val2=data2(R:L,1)-2.806;
63         u_val2=data2(R:L,3*i);
64         v_val2=data2(R:L,3*i+1)
65         Title_section=strcat('x=-1.83 m');
66     end
67     %%%%%%%%%%%%%Cálculo del error
68     [A,B]=size(p_val1);
69     for j=1:A
70         distance=abs(y_val2-p_val1(j));
71         [M,Position]=min(distance);
72         Error= (u_val2(Position) - u_val1(j))^2;
73         E_t = E_t + Error;
74         E_denom = E_denom + (u_val1(j))^2
75     end
76     E_t = sqrt(E_t/E_denom)
77     %Dibujos de datos 2d experimentales con numéricos
78     figure('Position', [0 0 400 400]);
79     hold on;
80     box on;
81     set(gca,'layer','top','FontSize',10);
82     grid on;
83     plot(u_val1,p_val1,'x','MarkerSize',11,'MarkerEdgeColor','k')
84     plot(u_val2,y_val2, 'Color','b')
85     %ylim([0 0.6])
86     %xlim([-0.6 0])
87     xlabel('u (m/s)', 'FontSize', 12)
88     ylabel('y (m)', 'FontSize', 12)
89     title({Title_section;strcat('Error = ',num2str(E_t));strcat('2D
        experimental u   X');strcat('Numerical v   {\color{blue}-}')},',
        'FontSize', 10)
90     hold off;
91     filename = strcat('comparisons/LHS_12/',list2(t).name,'_',num2str(i
        -1),'.eps');
92     set(gcf,'PaperPositionMode','auto');
93     print('-depsc2',filename);
94     E_g=E_g+E_t;
95     E_t=0;
96     E_denom=0;
97 end
98 error_global(t)=E_g/8;
99 close all
100 end
101 for d=1:size(list2,1)
102     if Time < 400
103         lambda(d) = 0.1;
104     else
105         lambda(d) = 0.1 + 1.8/500 * (Time - 400);
106     end
107     Time = Time + 10;
108 end

```

```
109 figure(1);
110     hold on;
111     box on;
112     set(gca,'layer','top','FontSize',25);
113     xlim([0.11 4.45])
114     hXLabel = xlabel('\lambda', 'FontSize', 25);
115     hYLabel = ylabel('Err_{mean,u}', 'FontSize', 25);
116     plot(lambda,error_global)
117     title('Err_{mean,u} vs \lambda (\beta=12)', 'fontsize', 25);
118     hold off;
119     print('erru', '-depsc');
120 plot(error_global)
121 plot(lambda,error_global)
122 [min,posmin]=min(error_global)
123 list2(posmin).name
```


Apéndice D

T-branching channel data treatment and analysis

D.1. Description of the case

One common example of OCF is a T-branching channel flow. The main distinctive features for this kind of channels are pictured in Figure D.1. They include a zone of separation near the entrance of the branch channel, a contracted flow region in the branch channel as well, a stagnation point near the downstream corner of the junction and a region of flow separation at the sidewall of downstream of the junction in the main channel due to flow expansion [39]. It is worth mentioning that the flow

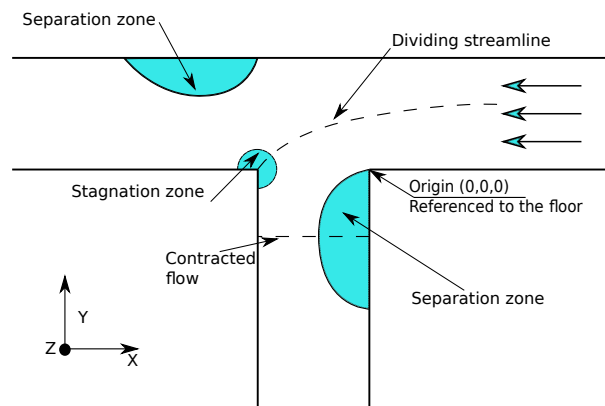


Figura D.1: Features found in a T-branching channel flow.

separation region downstream in the main channel only appears for high relative discharge, denoted by $Q_r = \frac{Q_b}{Q_u}$, where Q_b is the discharge of the branch channel flow and Q_u is the discharge of the main channel, measured upstream. Experimental measurements for a T-branching channel under different flow conditions can be found in [39]. Here, the results presented in [39] are digitized and analyzed. The details concerning the experimental setup are depicted in Figure D.2.

The channels were made of 12.7 mm Plexiglas plates and rest on a steel frame. The channel beds are horizontal. A transition section that contains screens and honeycombs was used to ensure a properly developed flow with low turbulence in the flume. Control gates were placed to regulate the flow depth.

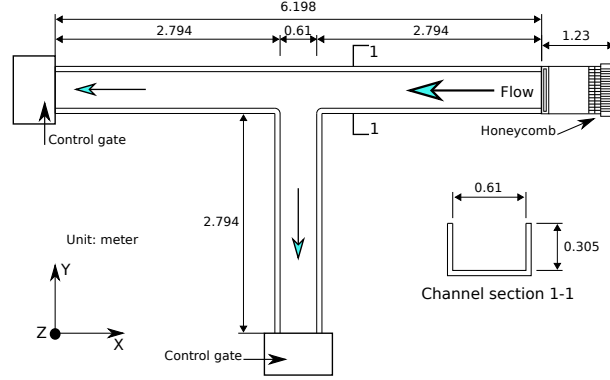


Figura D.2: Dimensional details of the experiment.

D.2. Measurements and data

D.2.1. Measurement techniques

The discharges from the main flume or the branch channel were measured using standard V-notches, with an estimated error of 3 % [39]. A V-notch weir (shown in Figure D.3) is a type of sharp crested weir. And it is used to measure open channel flows. One relationship to do so is the Kindsvater-Shen equation

$$Q = 4,28C_e \tan \frac{\theta}{2} h^{5/2} \quad (D.1)$$

where:

- Q is the flow rate in ft^3/s .
- C_e is the effective discharge coefficient. It is dimensionless.
- $h = H + k_h$, where H is the head on the weir (Figure D.3) and k_h is the head correction factor. Both in ft units.
- θ is the angle of the V-notch in degrees.

C_e and k_h are functions of only θ if the V-notch is fully contracted ($P \geq 2H_{max}$ and $S \geq 2H_{max}$)[42]. C_e and k_h can be found in [41], as well as precautions and restrictions concerning the use of V-notch weirs.

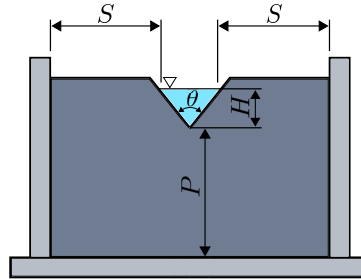


Figura D.3: Example of a V-notch weir.

A laser Doppler Anemometry unit (LDA) was used to measure the 3 mean velocity components of the flow field, with an estimated error of 1 % [39]. LDA is a non-intrusive optical technique that requires no calibration.

And a point gage was used to measure the water surface elevation in the channels. With a resolution of the measurement of 0.1 mm.

D.2.2. Provided data

The data were provided in tables in a scanned, uncopyable and unselectable *pdf* file. It was the best copy available, as stated in the mentioned *pdf* file [39]. The data consist of the water surface profiles $h(x, y)$ and the velocity fields $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ for the 5 different Q_r summarized in Table D.1. The amount of available data differs from one case to another, as can be noticed in the pictures in Appendix E. In this Appendix, the reader will find:

- 3d representation corresponding to the experimental velocity field.
- 2d representation of the experimental water depth.
- 2d representation of standard deviations, regarding \bar{u} and \bar{v} .
- 2d representation of the depth-averaged horizontal velocity magnitude, which is $|\bar{\mathbf{V}}_{2d}| = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$.
- 2d representation corresponding to the depth-averaged vertical velocity \bar{w} .
- 2d plots of every velocity profile available (in height).

All this is included for the 5 different values of Q_r . There is no data of w for $Q_r = 0,149$ or $0,308$. 2d representations are obtained through a Delaunay 2d filter, which interpolates linearly between nodes of a triangle grid. Transforming discrete data into continuous data. The case with the highest amount of information corresponds to $Q_r = 0,409$ and can be seen in Appendix E.3. Note that there is no velocity data available from this experiment for the free surface nor the bottom of the channel.

$Q_u(m^3/s)$	$Q_b(m^3/s)$	Q_r
0.047	0.007	0.149
0.046	0.014	0.308
0.046	0.019	0.409
0.047	0.032	0.672
0.046	0.038	0.838

Tabla D.1: Experimental flow conditions. Q_b is the discharge of the branch channel flow, Q_u is the discharge of the upstream main channel. Q_r denotes the ratio of Q_b to Q_u .

D.2.3. Data treatment

The intention is to transform 3D data of the experiment, where we have $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, to 2D depth-averaged data, by carrying out a depth averaging of the velocity components $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ and $\bar{w}(x, y)$. Their calculating process will be later explained. As a two-dimensional field is sought, the main interest lies in $\bar{u}(x, y)$ and $\bar{v}(x, y)$, but $\bar{w}(x, y)$ is also considered in order to show the quasi-two-dimensionality of the flow field. There are experimental data of w only for the next values of Q_r : 0.409, 0.672 and 0.838. u and v account for the horizontal velocity, whereas w stands for the vertical velocity.

As stated, all the information in the tables was in a simple scanned, uncopyable and unselectable *pdf* file. Therefore, optical character recognition (OCR) has been used. From there, the data was copyable in a Word document. It was then saved onto a tab-delimited text file (*txt*) through Excel. This *txt* file was imported to Matlab, which allows to create a *mat* file from the previous *txt* file. Then, a Matlab script (explained in appendix E.6) has been used to export this 3D data onto a *vtk* file, which can be visualized with Paraview.

Another script (appendix E.7) has been programmed to create:

- *vtk* files with the 2D velocity fields and the standard deviation of the average speed.
- To export *eps* files for each velocity profile we have data for.

2D velocity fields are obtained by calculating the average of the velocity in the vertical coordinate z as explained in the next derivation.

Following the definition of the average of a function over an interval, the mean of $u(x, y, z)$ in height is calculated as

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{z_n - z_1} \int_{z_1}^{z_n} u(x, y, z) dz, \quad (\text{D.2})$$

being the integral in (D.2) the red-colored area in Figure D.4 (left). For the sake of clarity, dependence of u upon x and y will be neglected in the following derivation.

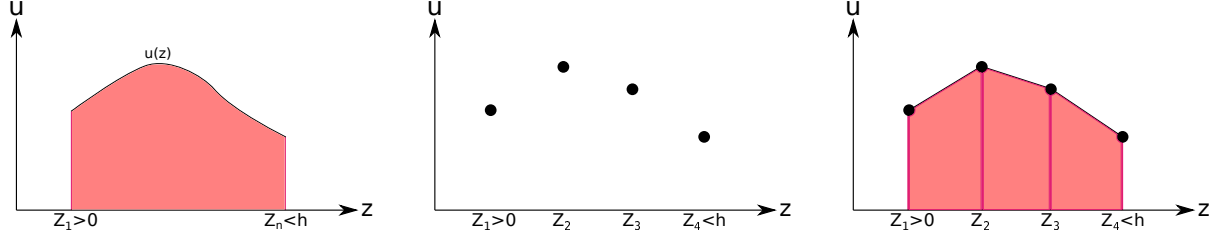


Figura D.4: Left: Defined integral of $u(z)$. Center: Example of a discrete velocity profile with 4 velocities for 4 different heights. Right: Calculated integral using the trapezoid rule.

However, we have discrete data for certain points in z instead of a continuous function, as seen in Figure D.4 (center).

If we now assume a linear variation of $u(z)$ between each pair of points, and considering that they are equally distanced, the integral can be approximated with the trapezoid rule for a uniform grid as follows

$$\int_{z_1}^{z_n} u(z) dz \approx \Delta z \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u(z_i) + u(z_{i+1})}{2}. \quad (\text{D.3})$$

Nevertheless, the distance between each point for which there is velocity data is not the same. So, the trapezoid rule for a non-uniform grid will be used instead.

$$\int_{z_1}^{z_n} u(z) dz \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u(z_i) + u(z_{i+1})}{2} (z_{i+1} - z_i), \quad (\text{D.4})$$

being $z_{i+1} - z_i = \Delta z_i$ and n the number of points in height for which there is data. The summation in (D.4) is pictured in Figure D.4 (right).

Finally, the average velocity is approximated by dividing the integral by the total interval for which there is data.

$$\bar{u} = \frac{1}{z_n - z_1} \int_{z_1}^{z_n} u(z) dz \approx \frac{1}{z_n - z_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u(z_i) + u(z_{i+1})}{2} (z_{i+1} - z_i). \quad (\text{D.5})$$

Same is to be applied in order to calculate \bar{v} and \bar{w} .

$$\bar{v} = \frac{1}{z_n - z_1} \int_{z_1}^{z_n} v(z) dz \approx \frac{1}{z_n - z_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v(z_i) + v(z_{i+1})}{2} (z_{i+1} - z_i). \quad (\text{D.6})$$

The standard deviation is calculated by definition as follows

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{u} - u_i)^2}{n}}. \quad (\text{D.7})$$

Where u_i corresponds to each velocity value used to calculate the depth-averaged velocity. Same is to be applied in order to calculate $\sigma_{\bar{v}}$.

$$\sigma_{\bar{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{v} - v_i)^2}{n}}. \quad (\text{D.8})$$

The result of this data treatment is what is shown in 2D representations in Appendix E. Experimental 3D data are also pictured. The information shown in the 3D representations was originally continuously mapped in one day for each Q_r , so a steady state in the experiment was reached [39].

The quasi-2-dimensionality, dimensionless, for each velocity profile is calculated as

$$\bar{\epsilon} = \frac{|\bar{w}|}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}. \quad (\text{D.9})$$

The total quasi-2-dimensionality is defined as

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i, \quad (\text{D.10})$$

where n accounts for the number of velocity profiles available for a given Q_r , since this will be the amount of $\bar{\epsilon}$ available. This parameter $\bar{\bar{\epsilon}}$ gives an idea of how 2-dimensional is the flow along the whole T-branching channel. The smaller $\bar{\bar{\epsilon}}$, the more two-dimensional. Additionally, the maximum value of $\bar{\epsilon}$ is found, as well as the 2-dimensional standard deviation defined as

$$\sigma_{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\epsilon}_i - \bar{\bar{\epsilon}})^2}{n}}. \quad (\text{D.11})$$

The results can be seen in Table D.2 for the values of Q_r that include information of the vertical velocity. Since the average \bar{w} is generally two orders of magnitude below the magnitude of the horizontal velocity, the flow can be considered as 2-dimensional. Maximum values of $\bar{\epsilon}$ do not correspond to higher \bar{w} areas,

Q_r	0.409	0.672	0.838
$\bar{\epsilon}$	0.0203	0.0425	0.0378
$\max \bar{\epsilon}$	0.2372	0.7536	0.2266
$\sigma_{\bar{\epsilon}}$	0.0335	0.0976	0.0436

Tabla D.2: Calculated values of 2-dimensionality.

but to unique and local points. These point's position do not have any apparently correlation for different values of Q_r . Maybe, they are due to data transcription mistakes given in [39]. They are not taken into account.

D.3. Hypotheses to complete velocity profiles

As mentioned, there is no velocity data available from this experiment for the free surface nor the bottom of the channel. Nonetheless, three hypotheses could be taken in count if the objective was to obtain a complete velocity profile from the top to the bottom. Then, values of \bar{u} , \bar{v} , $\sigma_{\bar{u}}$ and $\sigma_{\bar{v}}$ will be calculated and compared to the previous ones that were obtained by only using experimental data.

D.3.1. Derivation of the hypotheses

The first hypothesis concerns the no-slip condition, which states (for Newtonian fluids) that at the wall, the velocity relative to the wall is zero. This condition is characteristic of all viscous fluid flows [40]. In the case of study (explained in Subsection D.1) the T-branching channel is not moving. Therefore,

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0 \quad \forall x, y. \quad (\text{D.12})$$

The second hypothesis is related to the velocity at the free surface (where $z = h$). For each velocity profile, there is a small gap in height between the z position of the last point and the height of the water surface. In order to obtain the velocity at the free surface, the next assumption is considered.

If the friction between the free-surface and the air is neglected, a nil shear stress (τ) at $z = h$ can be assumed. By doing so, $\tau(z = h) = 0$. Newton's law of viscosity states,

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} . \quad (\text{D.13})$$

Since viscosity can not be zero, then

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=h} = 0 . \quad (\text{D.14})$$

The third hypothesis consists of assuming $\frac{du}{dz}$ to vary linearly upon z from its last known value to zero along the aforementioned small gap. The three hypotheses can be observed in Figure D.5.

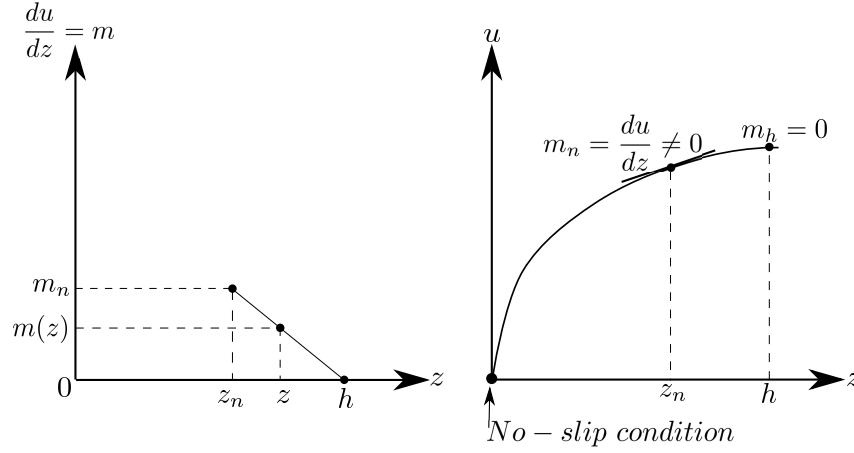


Figure D.5: Left: 3rd hypothesis. Right: 1st and 2nd hypothesis.

Hypothesis 1 is stated in (D.12) and Figure D.5 (right). The derivation of the expression for $u(z = h)$ will be now explained by operating with hypothesis 2 and 3. For practical reasons, $\frac{du}{dz}$ will be represented by m in the following derivation.

Counting on hypothesis 3, and by looking at Figure D.5 (left), $\tan(m)$ has to be constant. Therefore, a linear interpolation is performed to obtain $m(z)$ as follows,

$$\frac{z_n - h}{m_n - 0} = \frac{z - h}{m(z) - 0} \quad (\text{D.15})$$

where:

- m_n is the slope for the last known point that is yet to be defined.
- z_n is the height of the last point there is data for.
- h is the height of the free surface.
- $m(z)$ is the slope, defined for $z_n \leq z \leq h$.

Rearranging terms,

$$m(z) = m_n \frac{h - z}{h - z_n} . \quad (\text{D.16})$$

As $m(z) = \frac{du}{dz}$, then $du = m(z)dz$. Now both sides are integrated

$$\int_{u_{z_n}}^{u_h} du = \int_{z_n}^h m(z)dz , \quad (\text{D.17})$$

where u_h is the velocity at the free surface, u_{z_n} is the velocity at the last point for which there is information available and $m(z)$ has been defined in (D.16), consequently

$$u_h - u_{z_n} = \int_{z_n}^h m_n \frac{h - z}{h - z_n} dz. \quad (\text{D.18})$$

Integrating and rearranging terms yields

$$u_h = u_{z_n} + \frac{m_n}{h - z_n} \left[h(h - z_n) - \left(\frac{h^2 - z_n^2}{2} \right) \right]. \quad (\text{D.19})$$

Notice that m_n has not been formally defined yet, which is done now by calculating the slope between the second-to-last and the last known points there's data for, leading to

$$m_n = \frac{u_{z_n} - u_{z_{n-1}}}{z_n - z_{n-1}}. \quad (\text{D.20})$$

Therefore, we can now obtain the velocity at the free surface, as long as we have the surface height for a given pair of coordinates x, y for which their velocity profile is known. Same process is to be applied for v component of the velocity at the surface.

D.3.2. Comparison test for completed velocity profiles

Two velocity profiles have been selected to carry out a comparison test for the average velocity and the standard deviation. Details for these profiles can be seen in Table D.3. They correspond to $Q_r = 0,409$. The colored cells in Table D.3 stand for the data obtained through the hypotheses explained in Subsection D.3.1. Due to the difference in the data collection sections, the coordinates for which h is available do not normally correspond with the coordinates for which velocity data is available. Coordinates for the water surface height near to the velocity profile have been chosen to carry out this comparison. Therefore, the next assumption is considered.

$$\text{if } \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}, \frac{|y - \hat{y}|}{|y|} \ll 10^{-2} \quad \text{then } h(x, y) \approx h(\hat{x}, \hat{y}) \quad (\text{D.21})$$

where (x, y) are the coordinates of a velocity profile and (\hat{x}, \hat{y}) are the coordinates of the closest point where the water surface elevation has been measured.

Results can be seen in Tables D.4 and D.5. II (incomplete integration) is calculated exclusively with experimental data the way explained in Subsection D.2.3. CI corresponds to complete integration, where the hypotheses have been taken into account. AC means absolute change, which is $|\Delta \bar{u}|$ for example. Lastly, RC represents relative change to II, therefore $RC = \frac{|\Delta \bar{u}|}{\bar{u}_{II}}$. The selected profiles have coordinates corresponding to an area where the flow is mostly one-dimensional in the u direction. This area can be checked in Figure E.1.

Table D.4 shows a RC in \bar{v} of 26.1 %. This is because in this case, AC has the same order of magnitude than \bar{v}_{II} . Values of v are at least one order of magnitude smaller than u values. Therefore, adding a nil velocity at $z = 0$ changes the average velocity component \bar{v}_{II} considerably compared to \bar{u}_{II} . On the other hand, $\sigma_{\bar{v}}$ changes in a 13.7 % for the same reason, a zero does not affect the data dispersion as much as to the average \bar{v}_{II} .

It happens the opposite with \bar{u} . Since the flow for those coordinates is almost one-dimensional, \bar{u} is greater than \bar{v} . Consequently, \bar{u} is more affected by adding a nil velocity at $z = 0$ (concerning data dispersion) since $\frac{|\Delta \sigma_{\bar{u}}|}{\sigma_{\bar{u}_{II}}} = 502 \%$.

Table D.5 shows similar results for RC in \bar{u} , $\sigma_{\bar{u}}$ and $\sigma_{\bar{v}}$. Nevertheless, RC in \bar{v} is now 0.9 %. This is due to the magnitude order of v values. Comparing both velocity profiles, \bar{v}_{II} is 4 times bigger in Table D.5 than in Table D.4. Consequently, a nil velocity at $z = 0$ makes almost no change in \bar{v}_{II} in Table D.5.

To sum up, depth-averaged values change considerably for low velocity components and standard deviations change considerably for high velocity components.

In order to keep within experimental values, and since the average velocity magnitude changes just around 5 %, the hypotheses in Subsection D.3 will not be considered for further analysis.

$z(m)$	$u(m/s)$	$v(m/s)$	$z(m)$	$u(m/s)$	$v(m/s)$
0	0	0	0	0	0
0.01281	-0.653	0.055	0.01281	-0.574	0.044
0.02623	-0.684	0.034	0.02623	-0.624	0.038
0.04636	-0.677	0.023	0.04636	-0.642	0.038
0.06588	-0.685	0.003	0.06588	-0.633	0.027
0.08601	-0.664	-0.007	0.08601	-0.637	0.021
0.10614	-0.664	-0.009	0.10614	-0.63	0.016
0.12627	-0.6	-0.014	0.12627	-0.593	0.005
0.14579	-0.596	-0.01	0.14579	-0.535	0.011
0.14945	-0.59563	0.006519	0.1464	-0.5341	0.011047

Tabla D.3: Selected data for the comparison test by using the hypotheses explained in Subsection D.3.1. The colored cells stand for the data obtained through the hypotheses. Left: $(x, y) = (0, 5917, 0, 13)$. h at $(0, 58987, 0, 13) = 0, 14945 m$. Right: $(x, y) = (0, 5917, 0, 05978)$, h at $(0, 58987, 0, 05978) = 0, 1464 m$. Coordinates are in meters.

Variable	II	CI	AC	RC
\bar{u}	-0.6565	-0.6267	0.0297	0.0453
\bar{v}	0.0057	0.0071	0.0015	0.261
$\sigma_{\bar{u}}$	0.0335	0.2015	0.168	5.02
$\sigma_{\bar{v}}$	0.0238	0.0206	0.0032	0.137

Tabla D.4: Results of the comparison test corresponding to $(x, y) = (0, 5917, 0, 13)$. Coordinates are in meters. Velocities, standard deviations and changes are in $\frac{m}{s}$.

Variable	II	CI	AC	RC
\bar{u}	-0.6172	-0.588	0.0292	0.0473
\bar{v}	0.0239	0.0236	0.0003	0.00905
$\sigma_{\bar{u}}$	0.0365	0.1903	0.1537	4.208
$\sigma_{\bar{v}}$	0.0133	0.0146	0.0013	0.1002

Tabla D.5: Results of the comparison test corresponding to $(x, y) = (0, 5917, 0, 05978)$. Coordinates are in meters. Velocities, standard deviations and changes are in $\frac{m}{s}$.

D.4. Analysis of the experimental results

The vertical component of velocity is available in [39] for values of $Q_r = 0,409$, $0,672$ and $0,838$. The depth-averaged vertical velocity is depicted in Figures E.15, E.24 and E.30 lower right, where the highest values can be seen in the entrance to the branch channel, where a gradient in water depth is observed. As the flow is contracted by the recirculation area, it accelerates and its water depth decreases due to the boundary conditions of the v-notches. Such fact can be explained if we consider incompressible flow in a steady state without viscous effects with Bernoulli's principle, read for a 1D streamline

$$\frac{v^2 \rho}{2} + P + \rho g z = \mathcal{C} , \quad (\text{D.22})$$

where v is the velocity, ρ is the density, P is the pressure, g is the acceleration due to gravity, z is the height of the considered point along a streamline, which in this analysis is the water depth h , and \mathcal{C} is a constant.

In order to illustrate with an example, consider the one-dimensional surface streamline depicted in Figure D.6. Pressure in both points equal atmospheric pressure, therefore neglected. Since the bed elevation equals zero, the pressure is accounted by $\rho g h$. Now expression (D.22) turns into

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2 . \quad (\text{D.23})$$

If there is no change in pressure, because this situation concerns a surface flow, gravity and density is considered, then D.23 can be rewritten as

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + g(h_1 - h_2)} , \quad (\text{D.24})$$

where different situations can occur. If $h_1 = h_2$ then $v_1 = v_2$, if $h_1 > h_2$ then $v_2 > v_1$ and if $h_1 < h_2$ then $v_2 < v_1$. The situation that explains the highest values in the depth-averaged vertical velocity at the entrance of the branch channel is the 2nd one due to the decreasing in the water depth, water has to flow down and its vertical component of velocity is higher there.

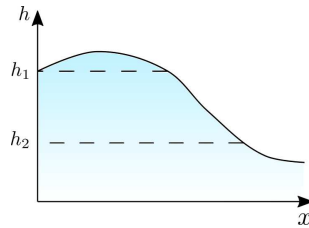


Figure D.6: Example of a streamline with a decreasing in water depth h .

It is worth showing how the width of the separation zones changes for different values of Q_r . Cross sections at $x = -1,037 \text{ m}$ and $y = -0,4453 \text{ m}$ (see Figure D.1 for origin of coordinates) for all values of Q_r , including the depth-averaged velocity component parallel to the flow direction, are depicted in Figures D.7 and D.8. It is observed that as one recirculation area grows in width, the other one shrinks. The change in the recirculation width is mostly noticed in Figure D.8. The line corresponding to $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in Figure D.8 crosses every experimental profile farther as Q_r raises, which means that v component of velocity changes its sign closer to the right wall as Q_r raises, making the recirculation area thinner and thinner as more flow rate is required in the branch channel. Depth-averaged u , in Figure D.7, also tends to be less negative as Q_r raises, but it does not change its sign along the cross section for 3 out of 5 velocity profiles available. A plot concerning values of separation zone width, out of Figure D.8, can be obtained if the recirculation width is studied deeper at $y = -0,4453 \text{ m}$ by measuring the distance where $v = 0$ crosses every velocity profile in Figure D.8. Such plot is presented in Figure D.9, where the linear regression

$$Rec = 0,3463 - 0,2697 Q_r , \quad (\text{D.25})$$

is also included, being Rec the recirculation width in meters. Additionally, the coefficient of determination R^2 is also calculated, resulting into a value of $R^2 = 0,9756$ which means that experimental outcome is well replicated by the linear function obtained (D.25).

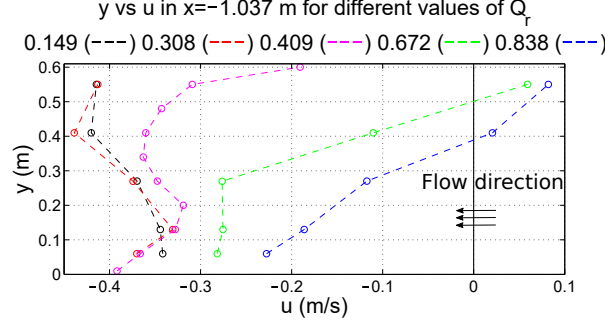


Figura D.7: Velocity profiles of horizontal depth-averaged velocity along cross section at $x = -1,037 \text{ m}$. It shows a decreasing in velocity, and a change in the sign of velocity, as Q_r raises and more flow rate is required downstream in the branch channel.

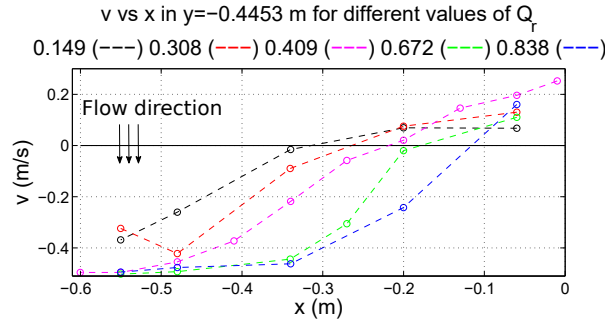


Figura D.8: Velocity profiles of vertical depth-averaged velocity along cross section at $y = -0,4453 \text{ m}$. It shows an increasing in velocity, and a change in the sign of velocity, as Q_r raises and more flow rate is required downstream in the branch channel.

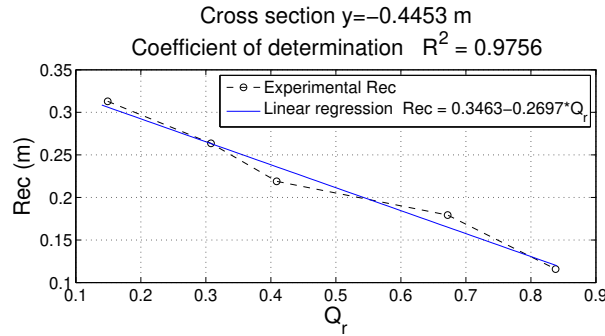


Figura D.9: Recirculation width at cross section corresponding to $y = -0,4453 \text{ m}$ out of depth-averaged velocity values as Q_r raises. Linear regression and coefficient of determination R^2 are included in the title.

Apéndice E

T-branching channel digitized data and Matlab scripts

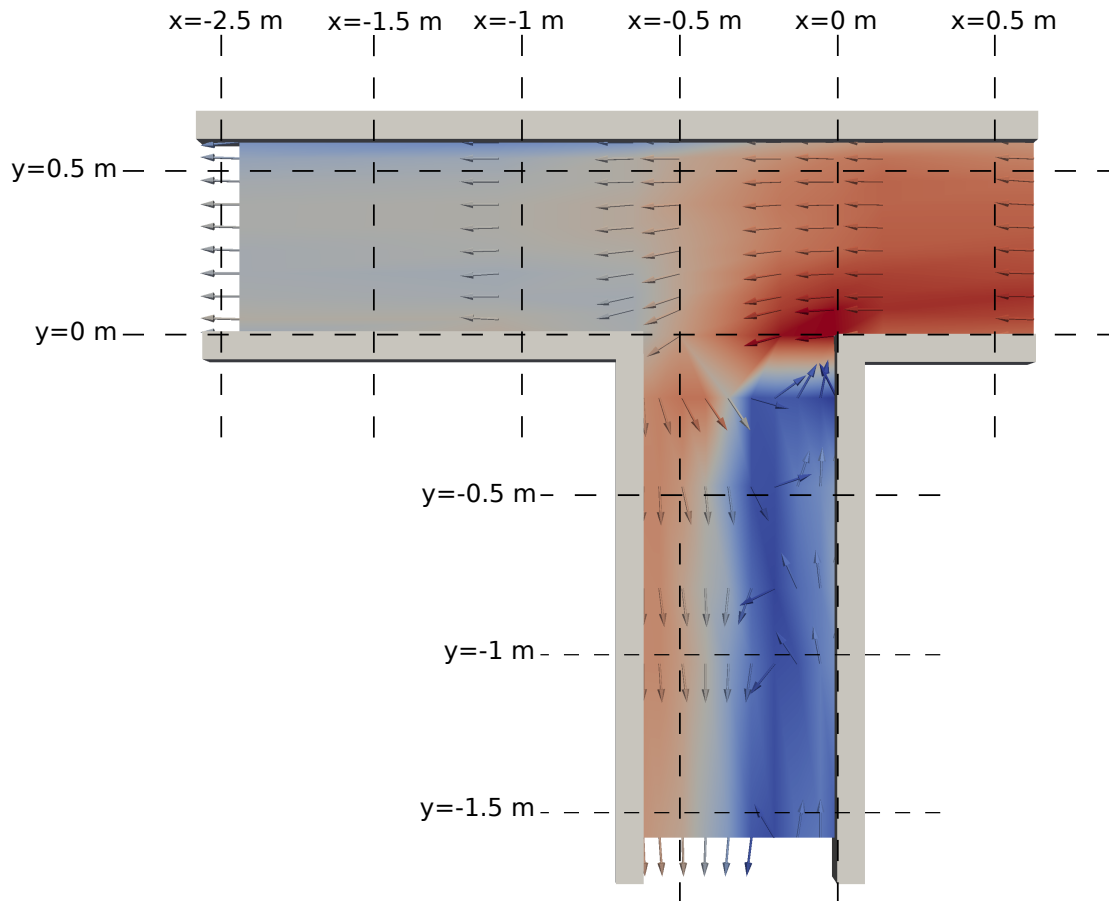


Figura E.1: Drawn grid on the 2-dimensional representation of the velocity average magnitude corresponding to $Q_r = 0,409$. It can serve as a reference to see the area where a given velocity profile from appendices below is located.

E.1. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,149$

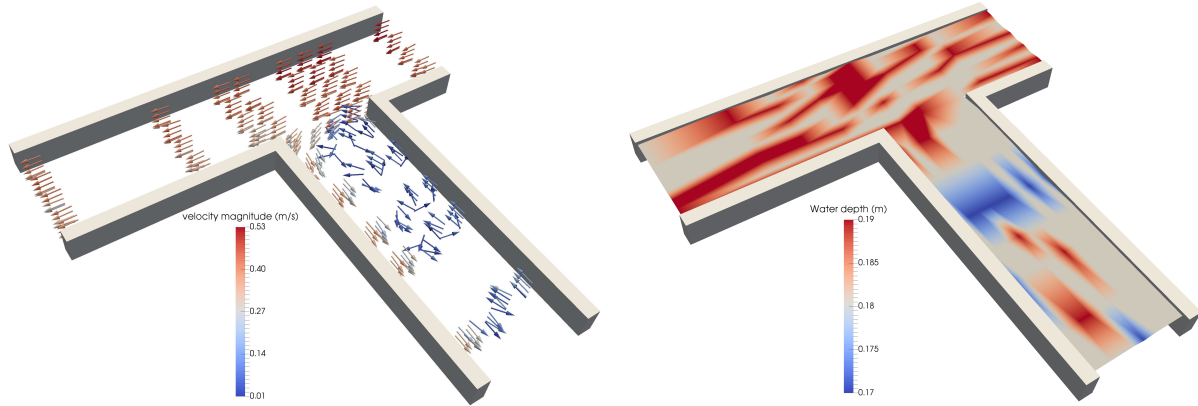


Figura E.2: Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,149$.

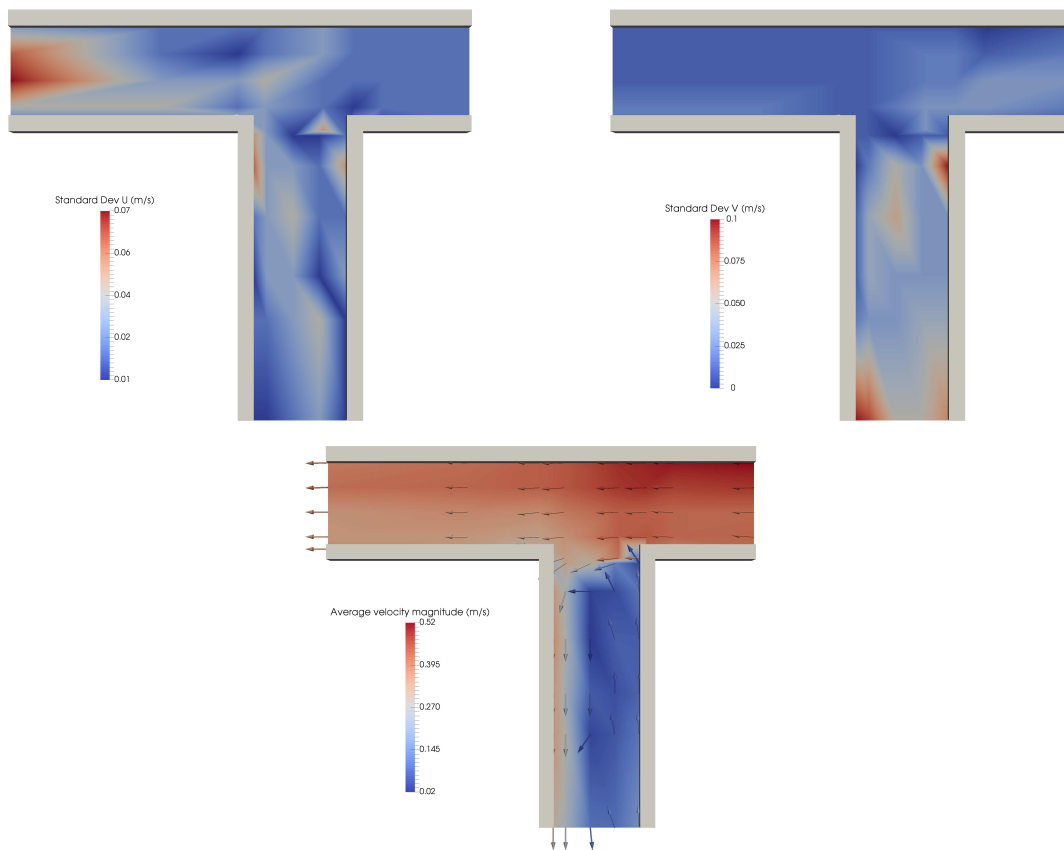
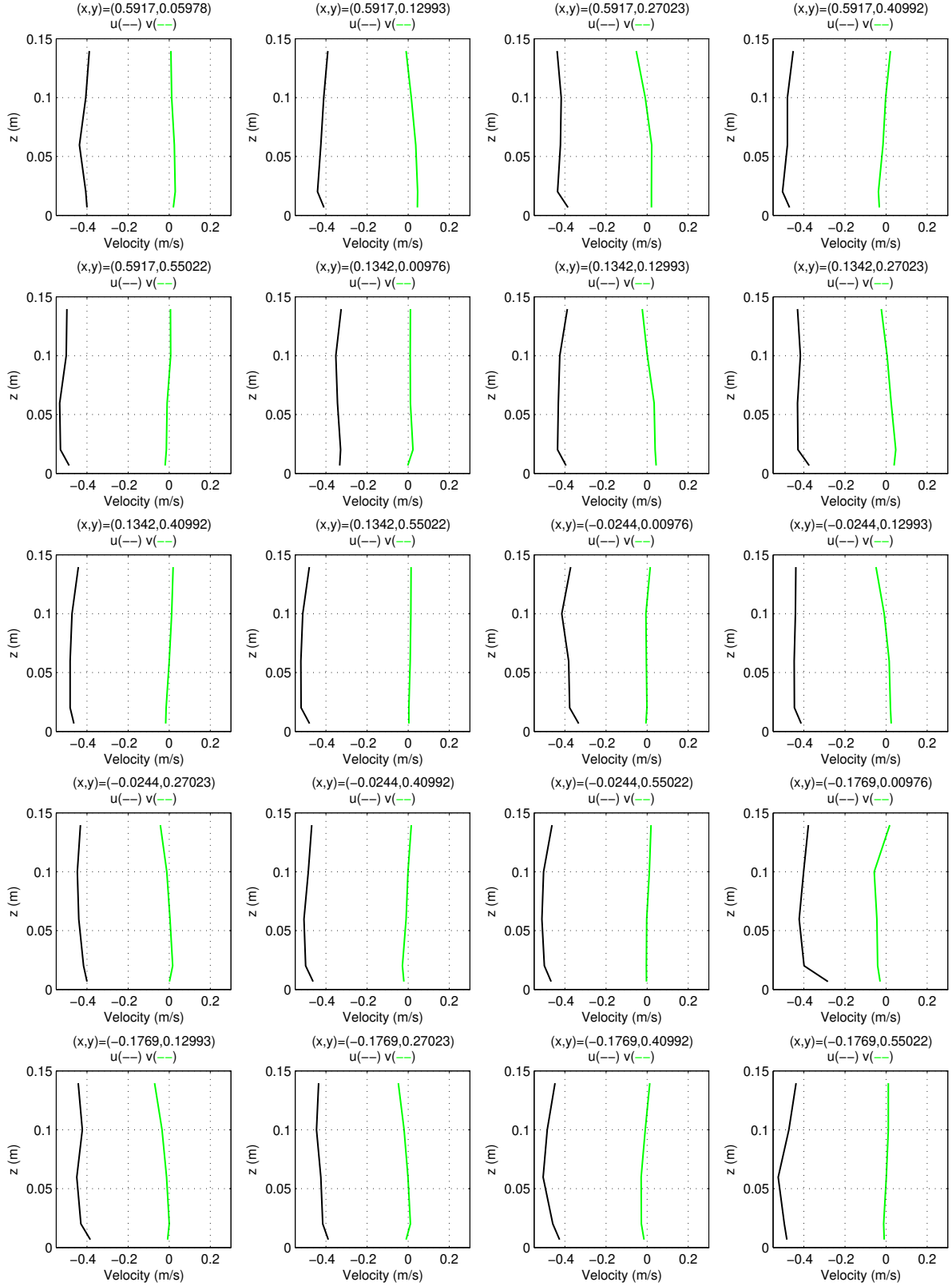


Figura E.3: Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Center: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Corresponding to $Q_r = 0,149$.

E.1.1. Velocity profiles

Figure E.4: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.

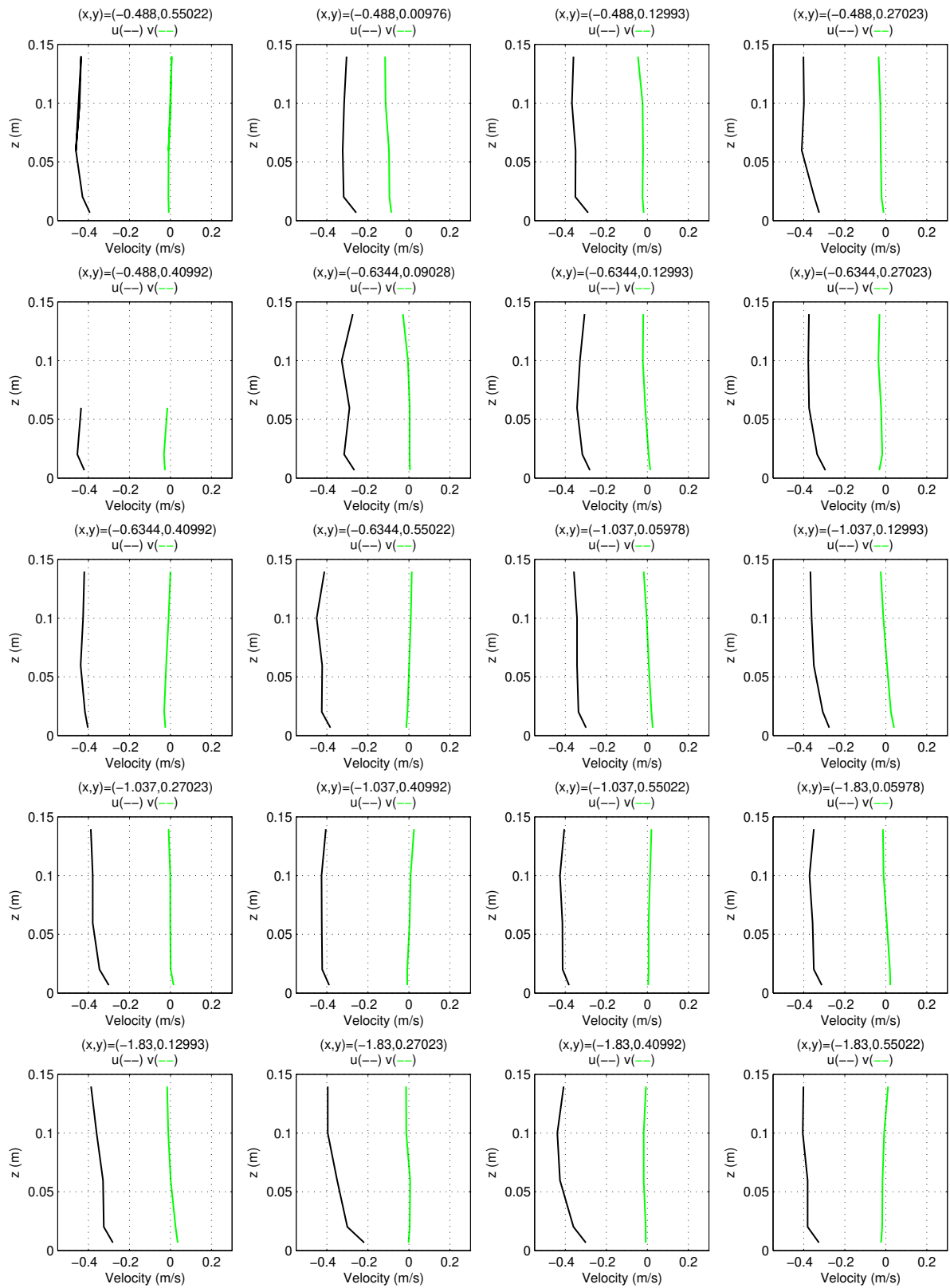
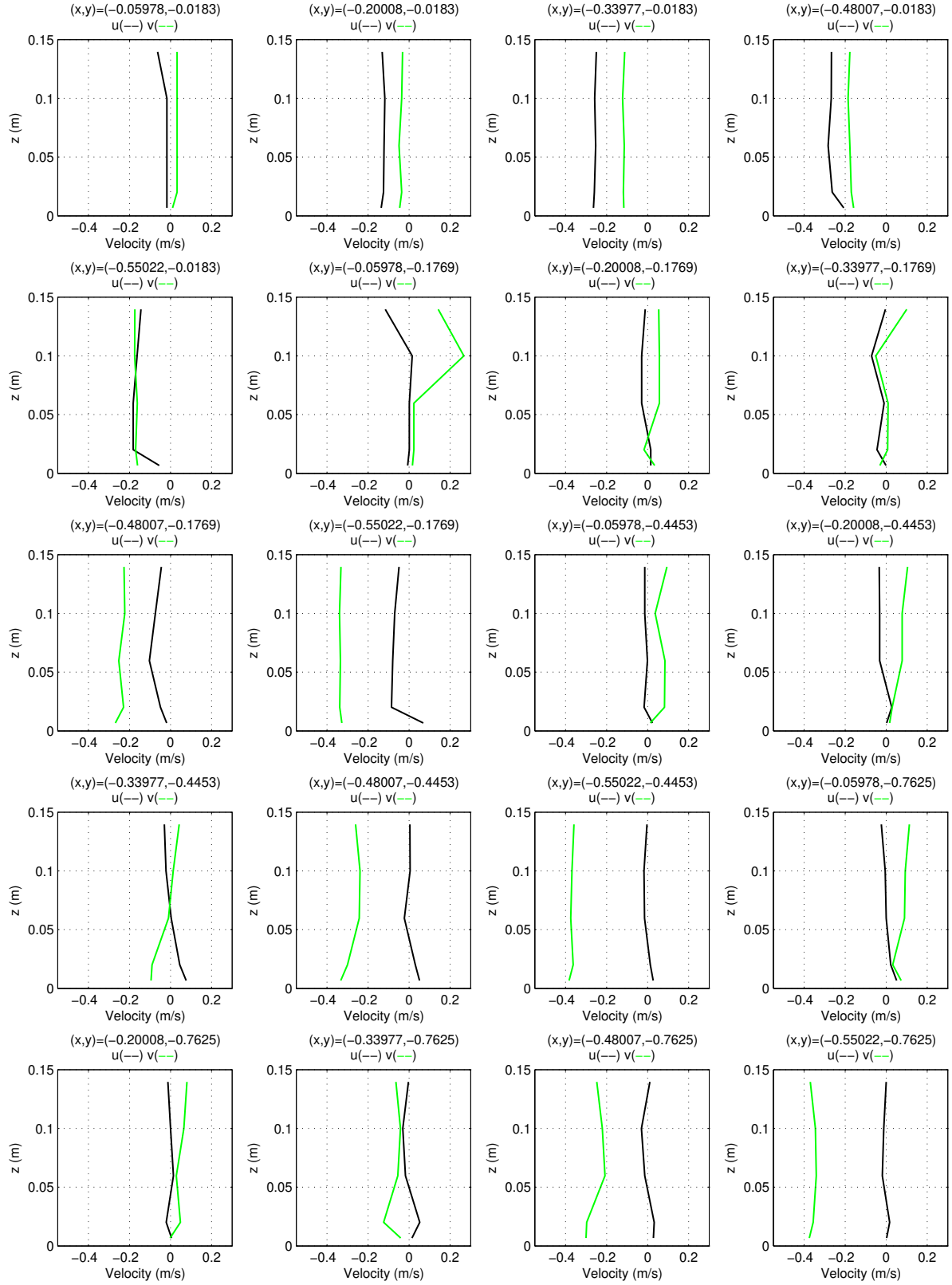


Figure E.5: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.

Figure E.6: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.

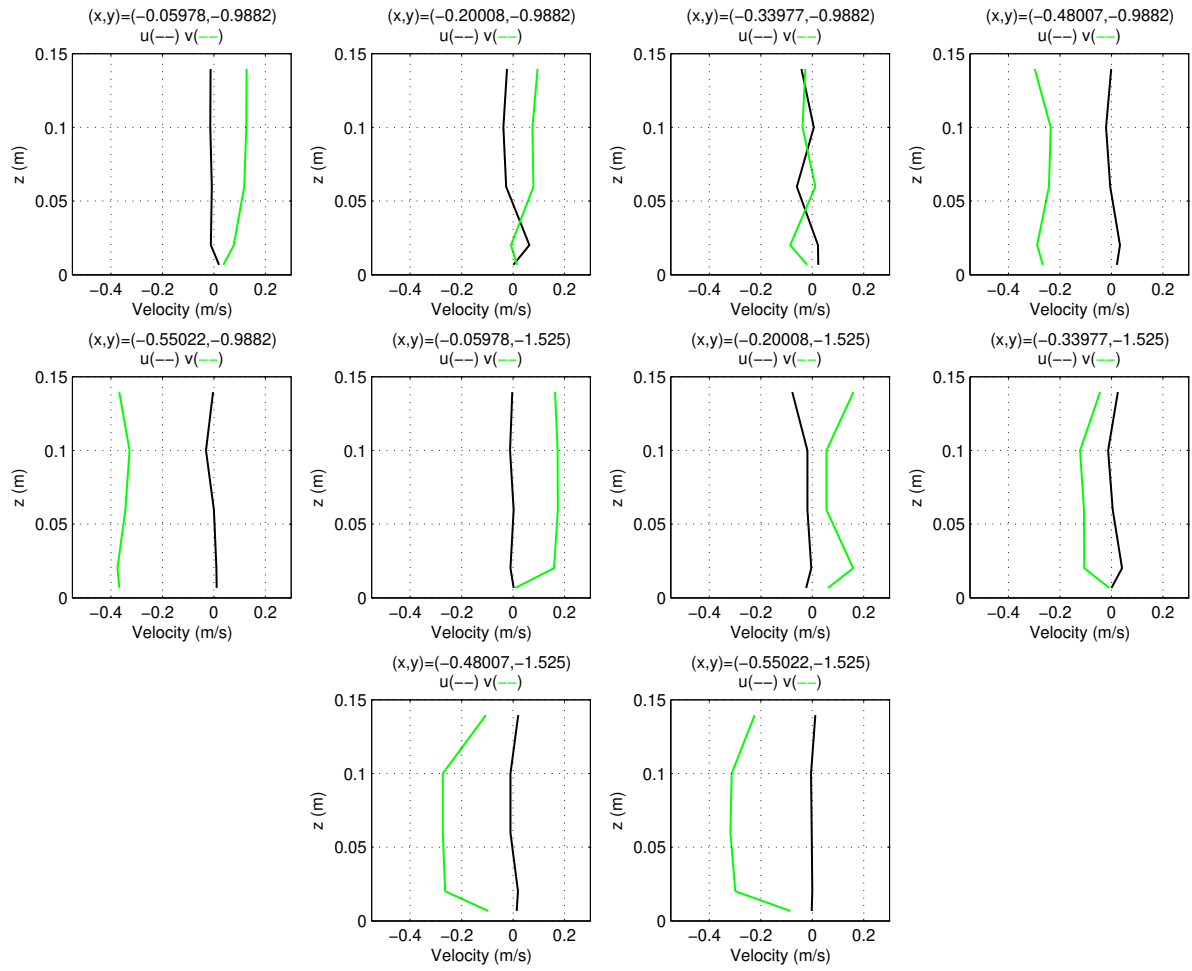


Figure E.7: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0.149$. Coordinates in meters.

E.2. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,308$

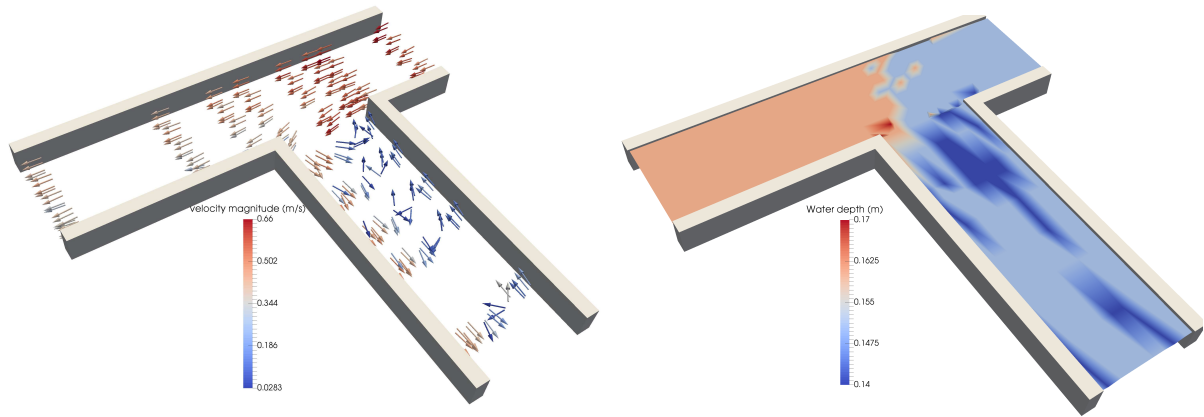


Figura E.8: Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,308$.

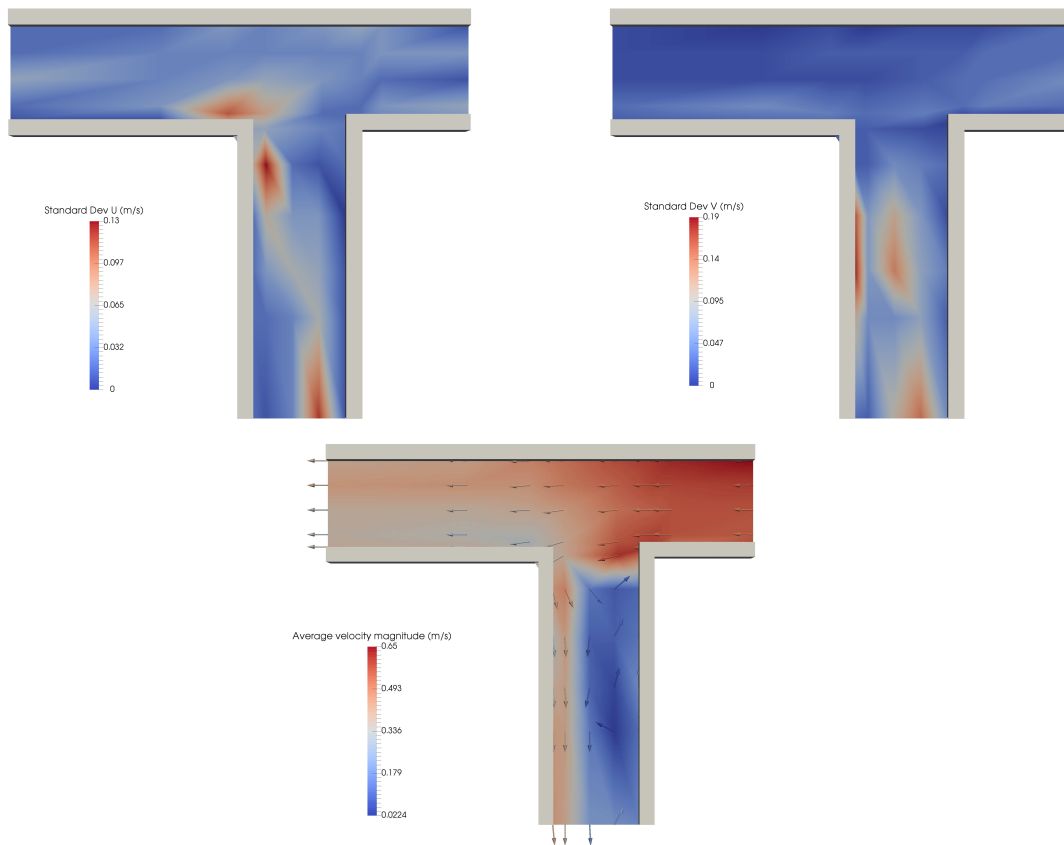


Figura E.9: Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Center: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Corresponding to $Q_r = 0,308$.

E.2.1. Velocity profiles

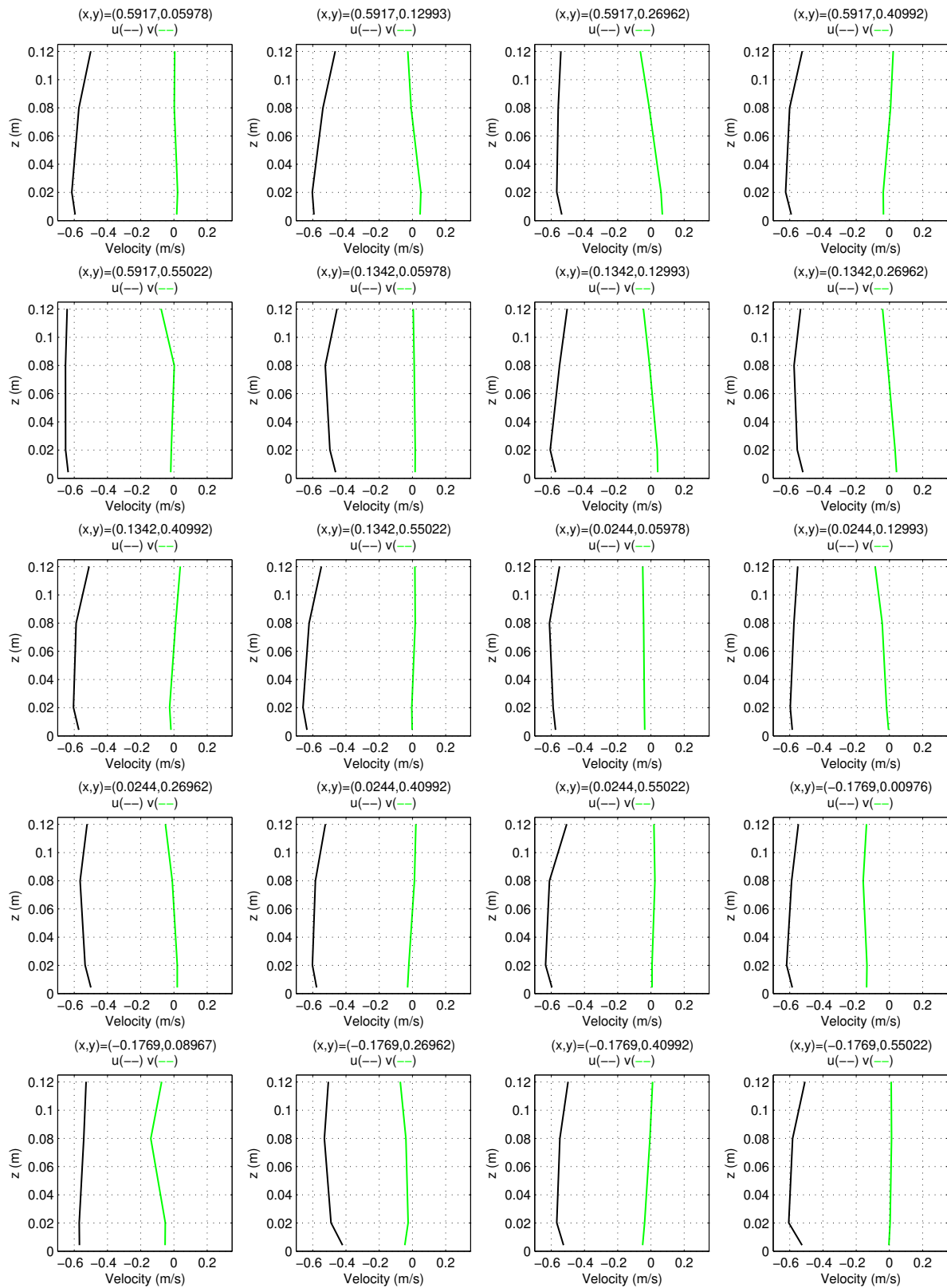


Figure E.10: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.

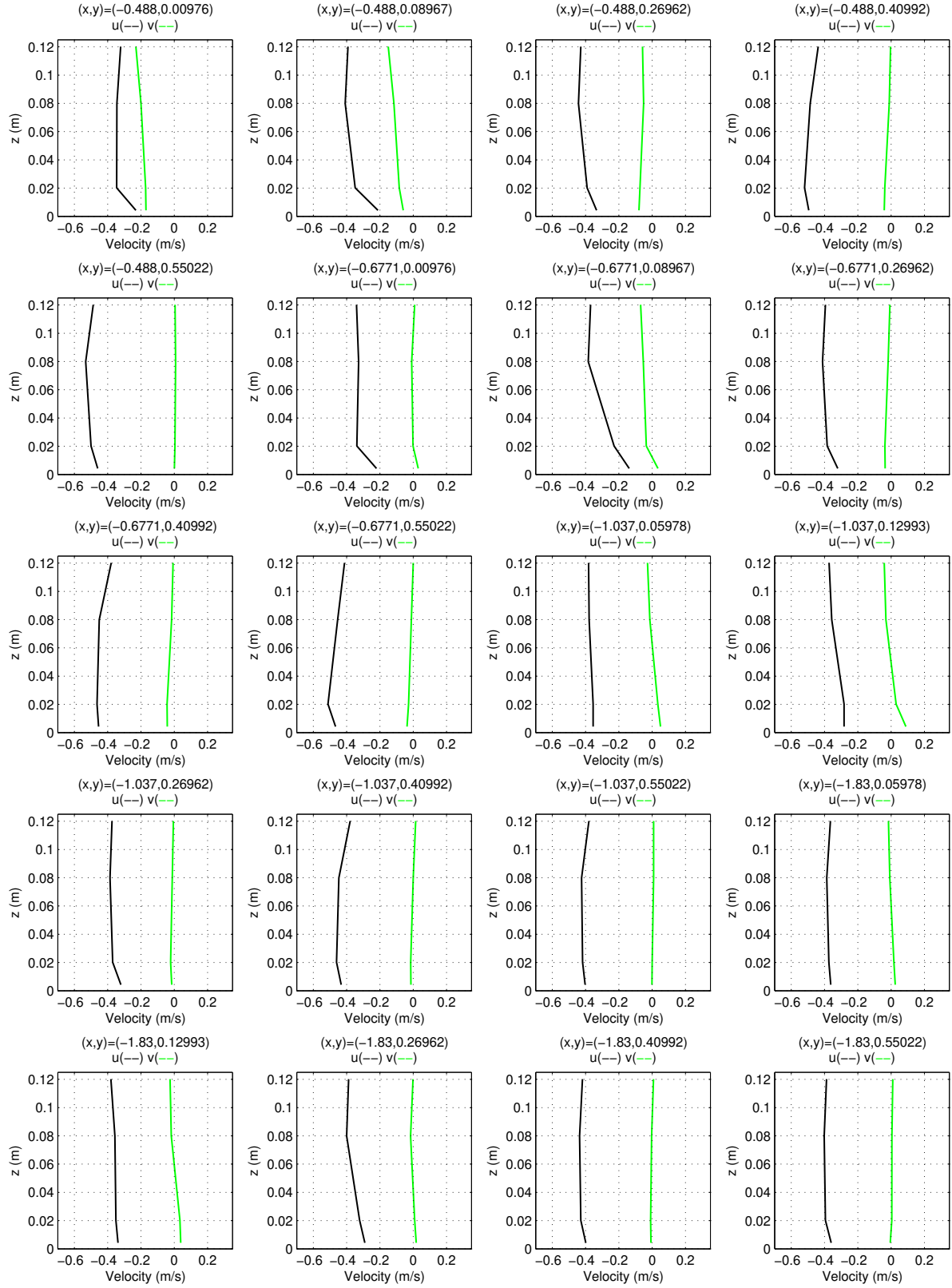


Figura E.11: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.

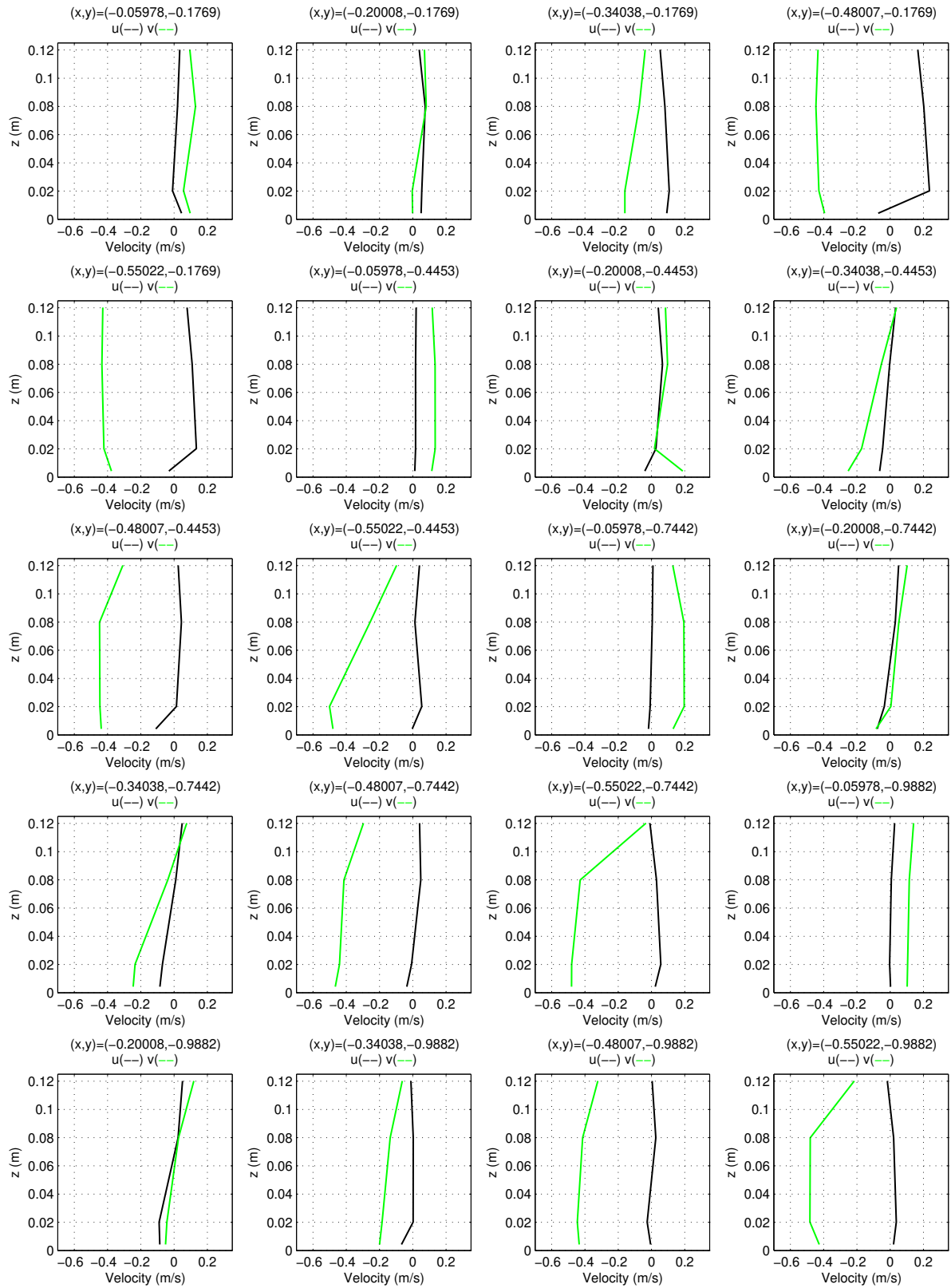


Figura E.12: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.

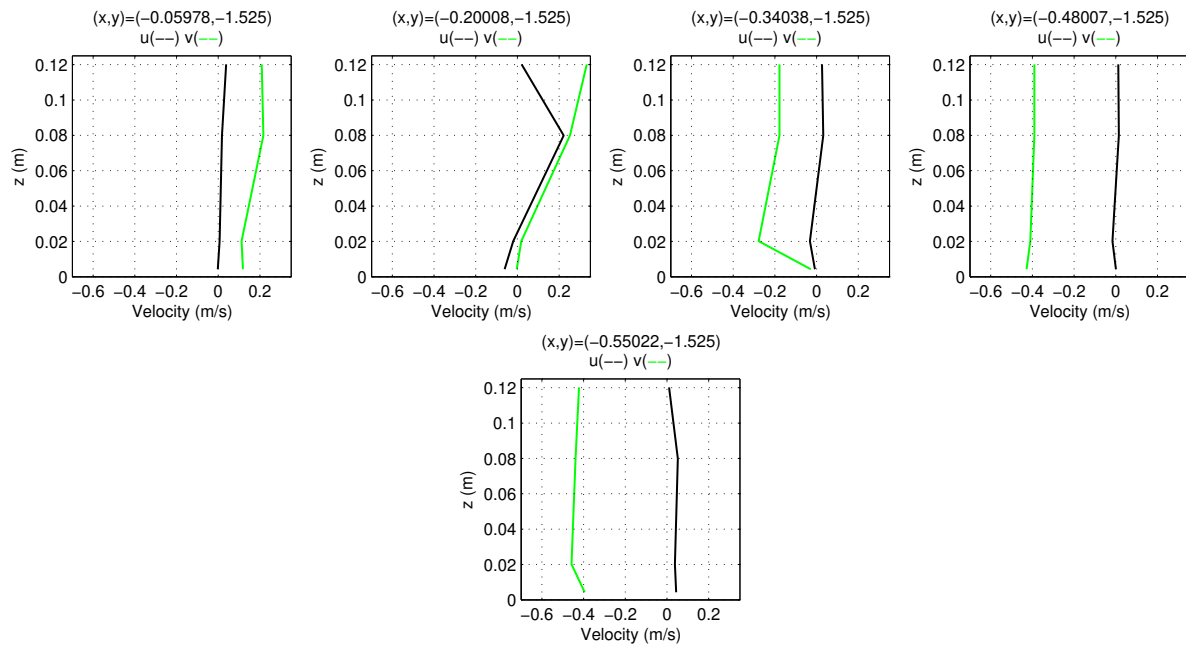


Figura E.13: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.

E.3. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,409$

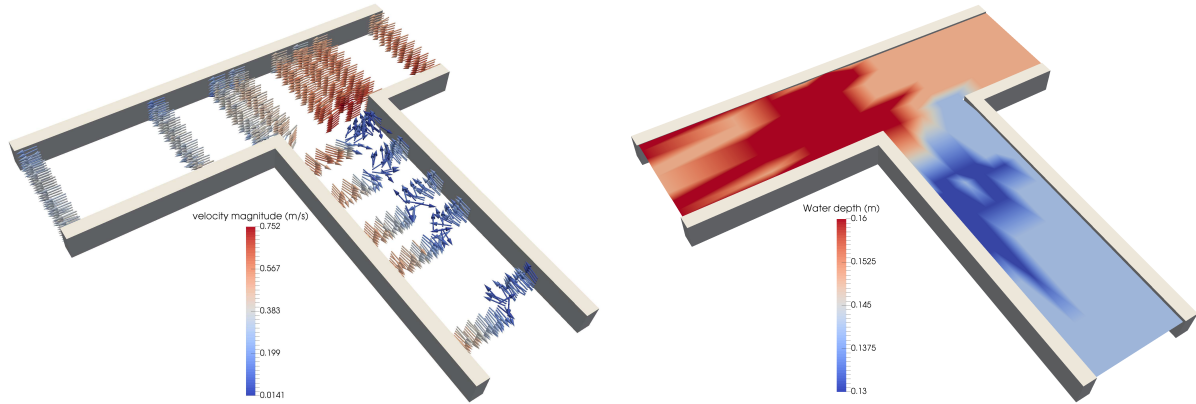


Figure E.14: Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,409$.

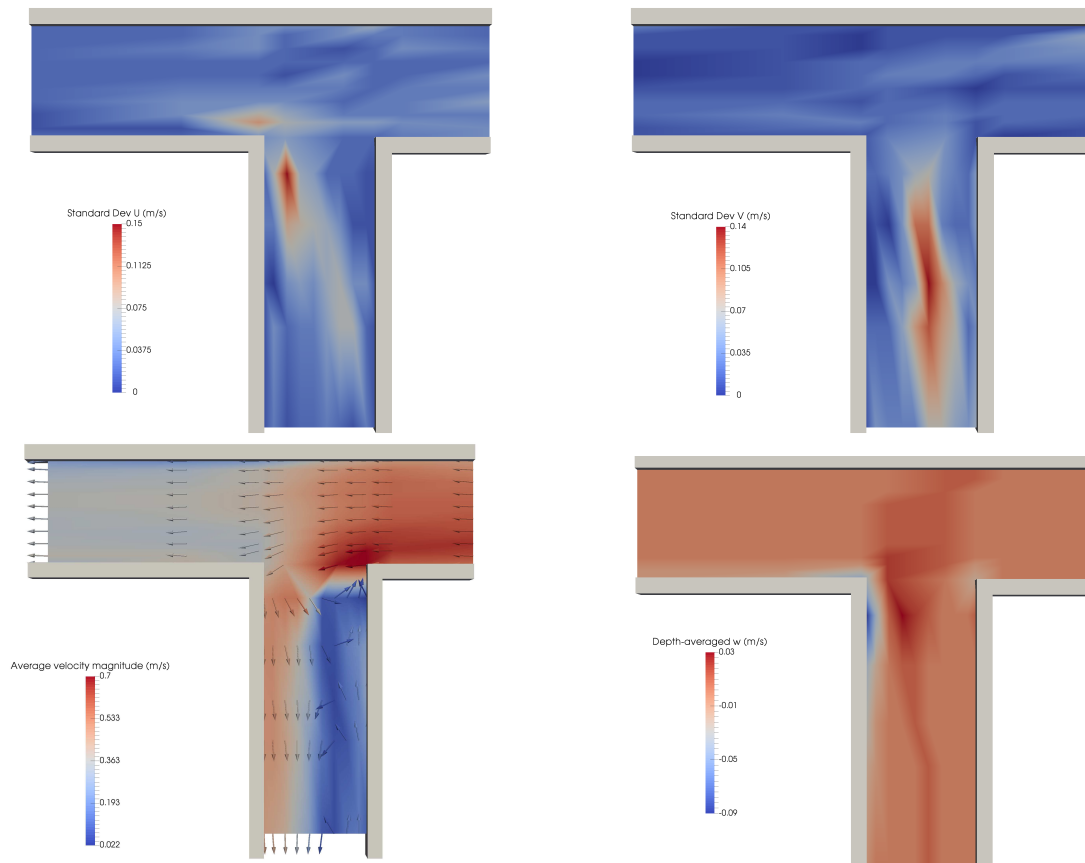


Figure E.15: Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,409$.

E.3.1. Velocity profiles

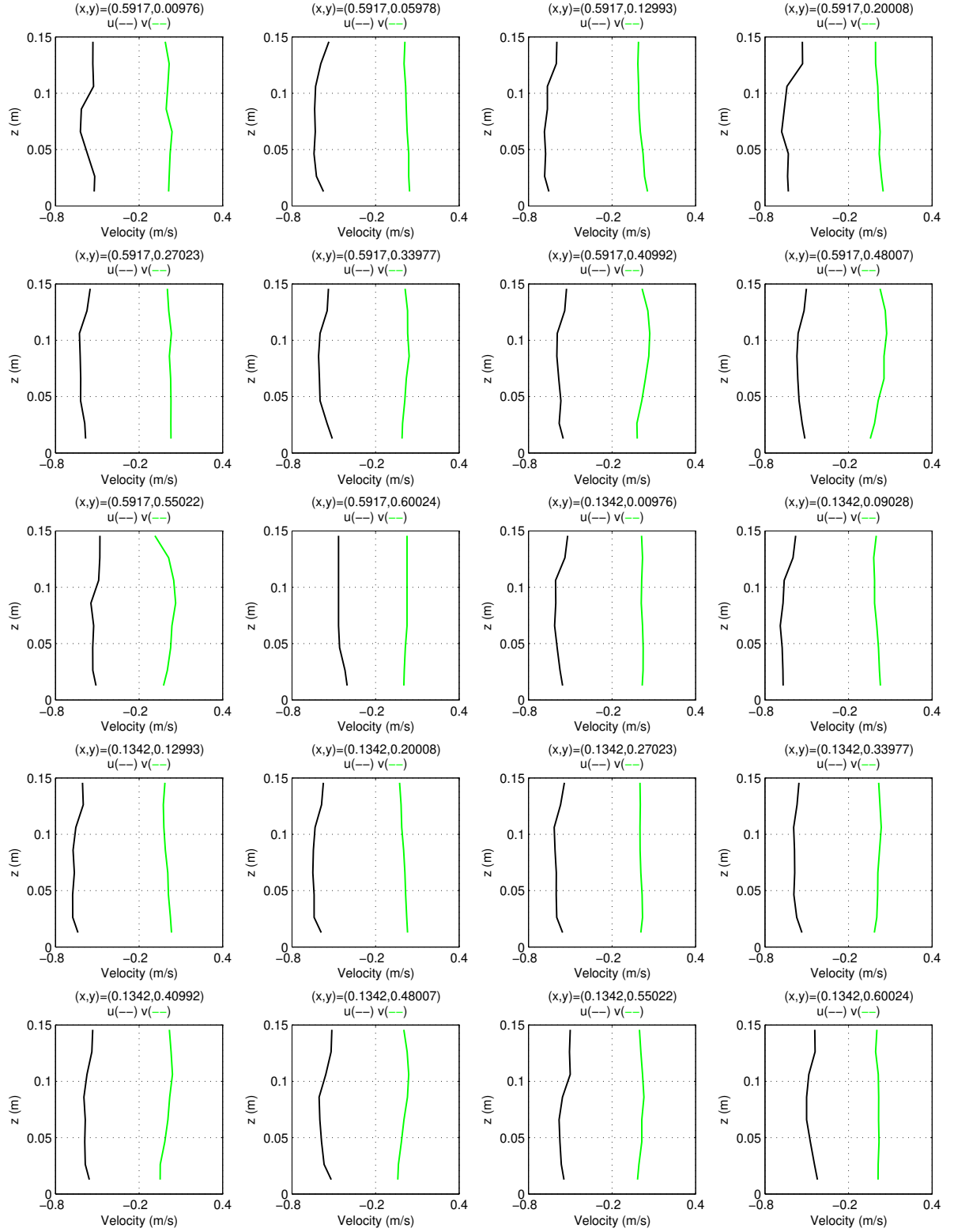


Figure E.16: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

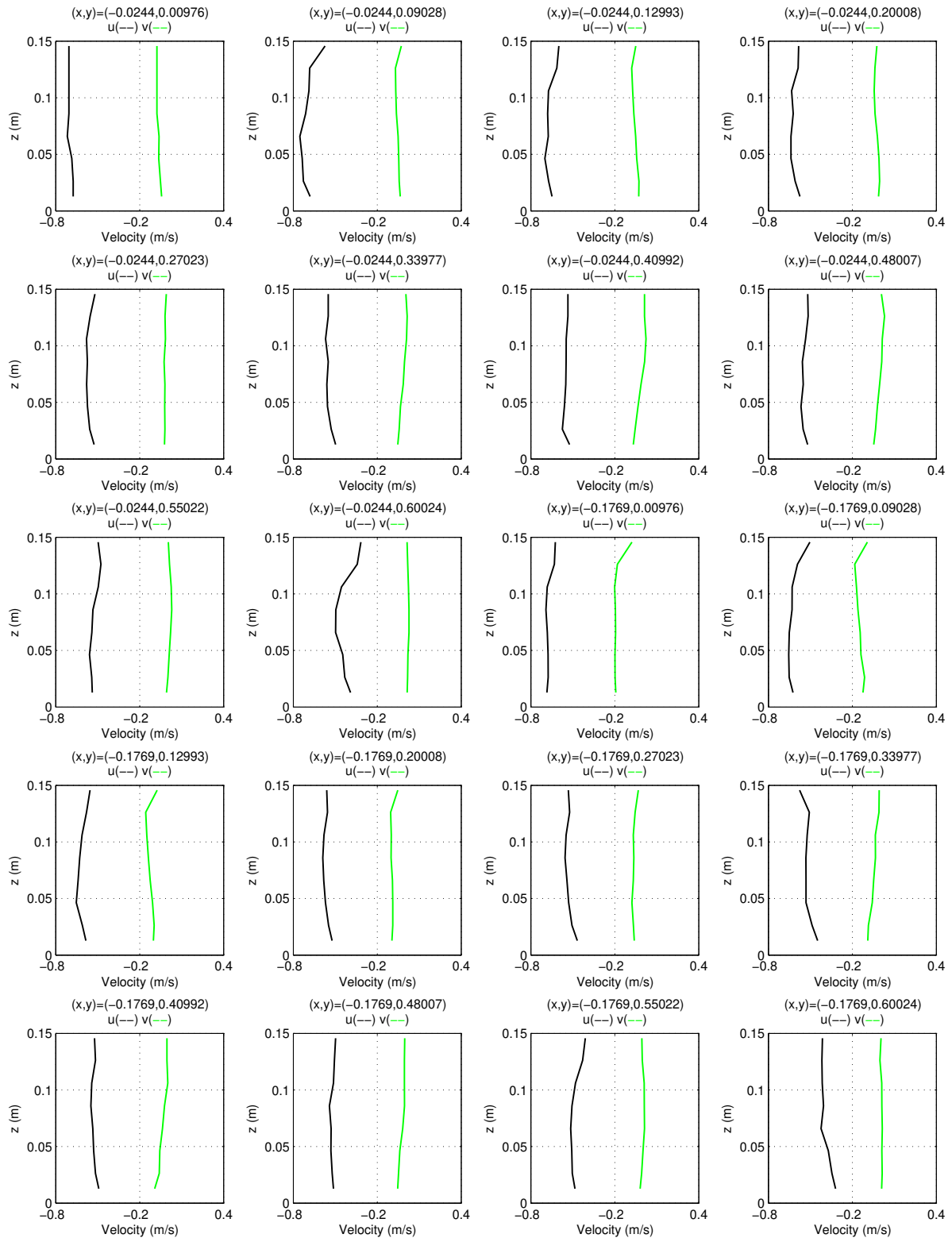


Figura E.17: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

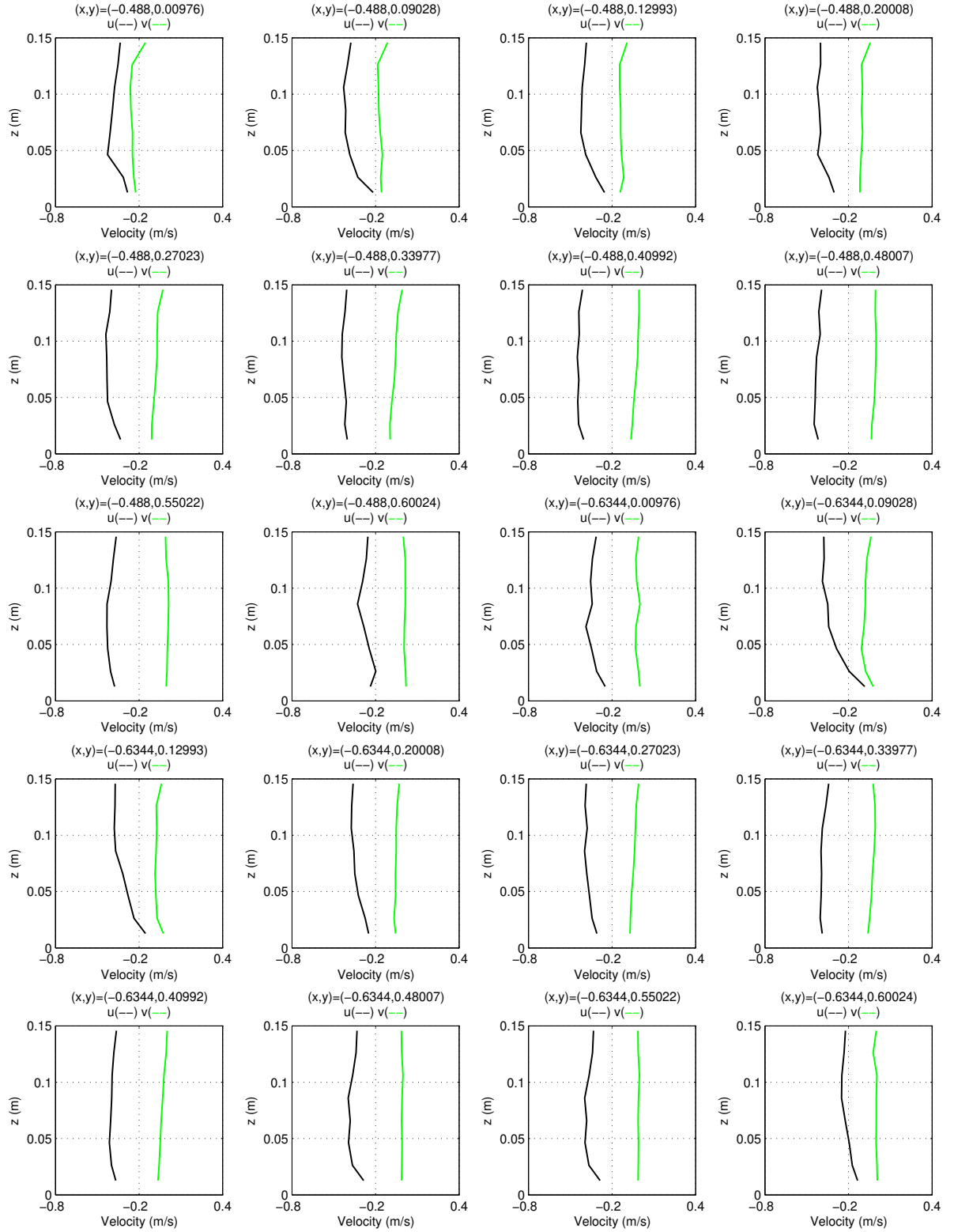


Figura E.18: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

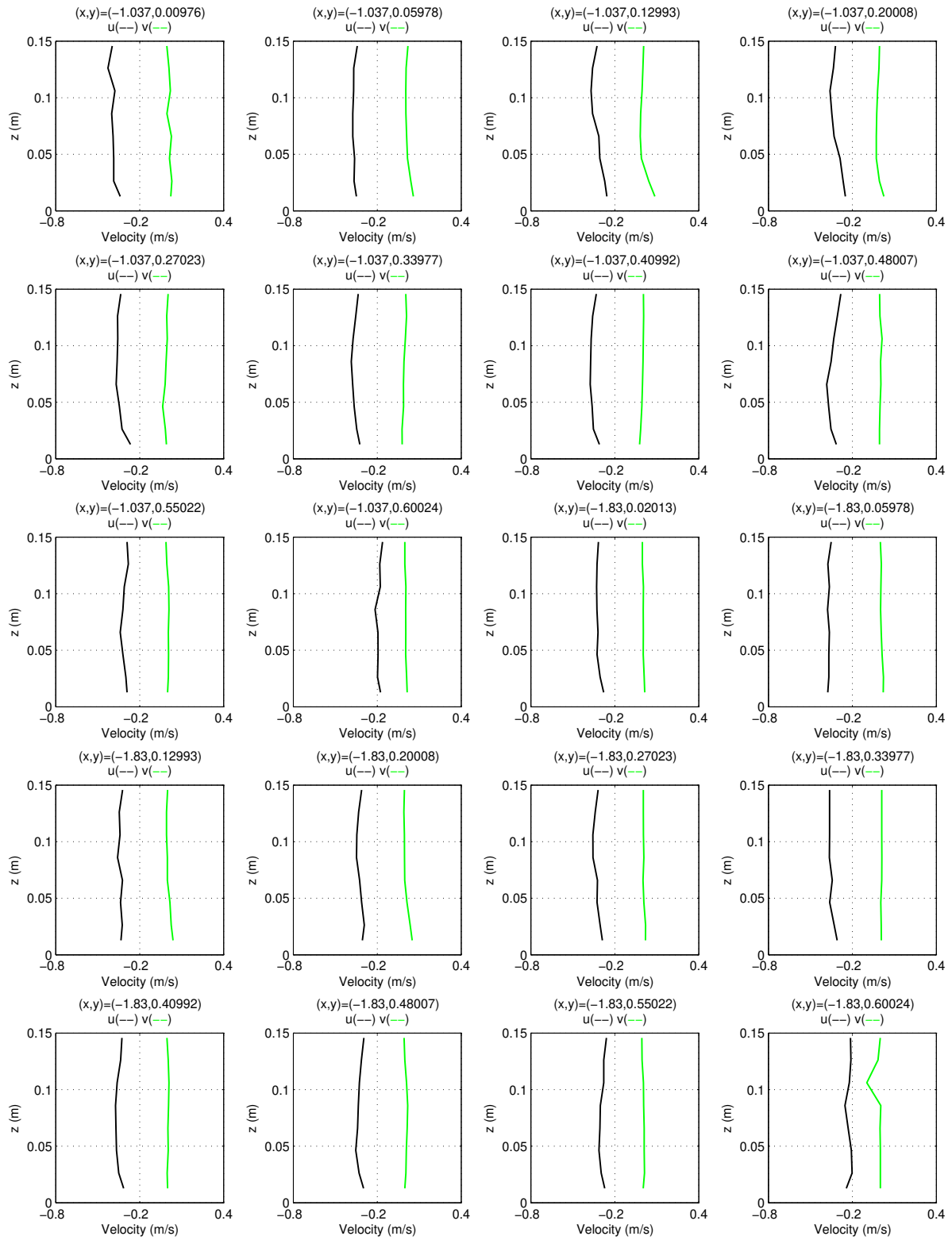


Figura E.19: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

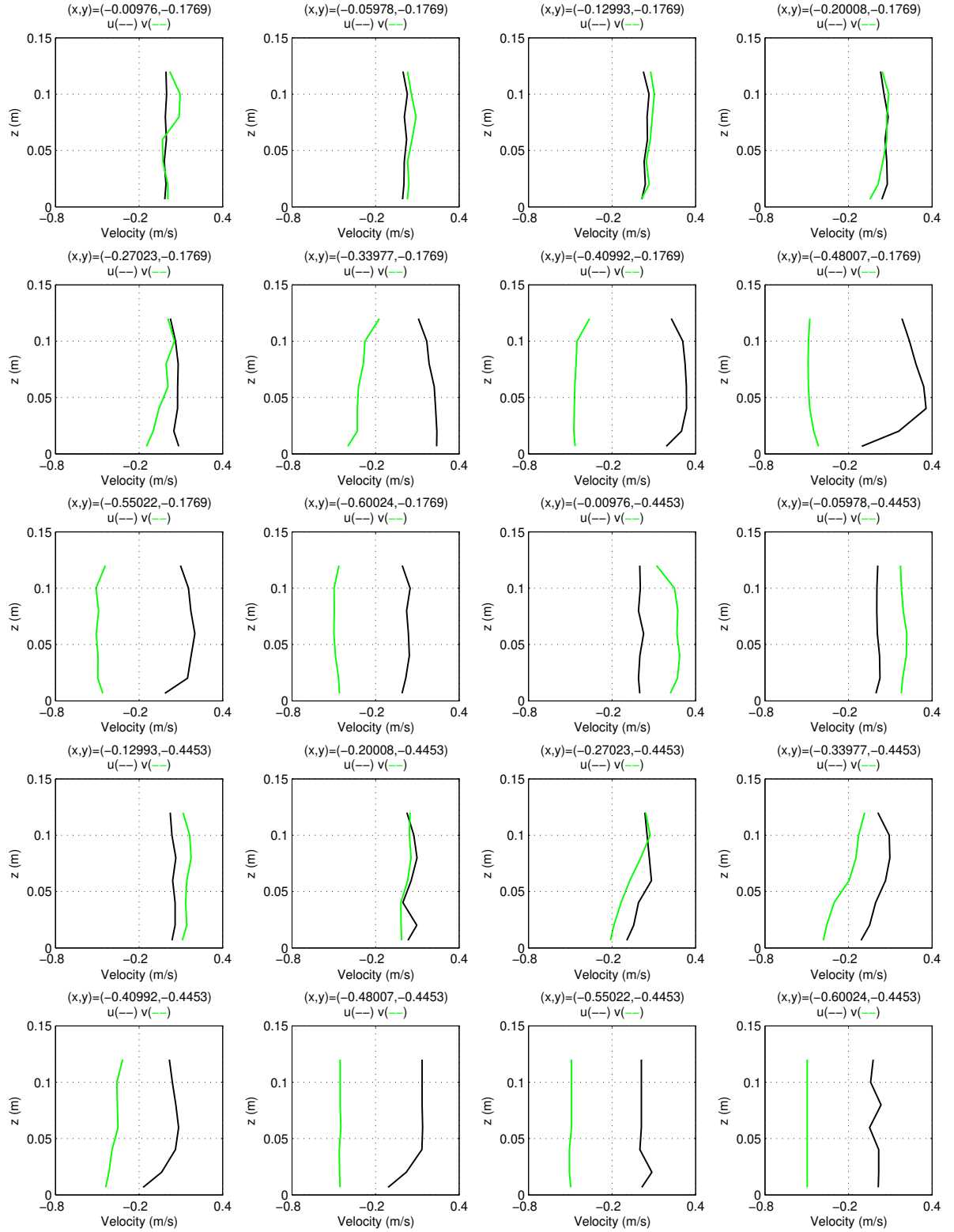


Figura E.20: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

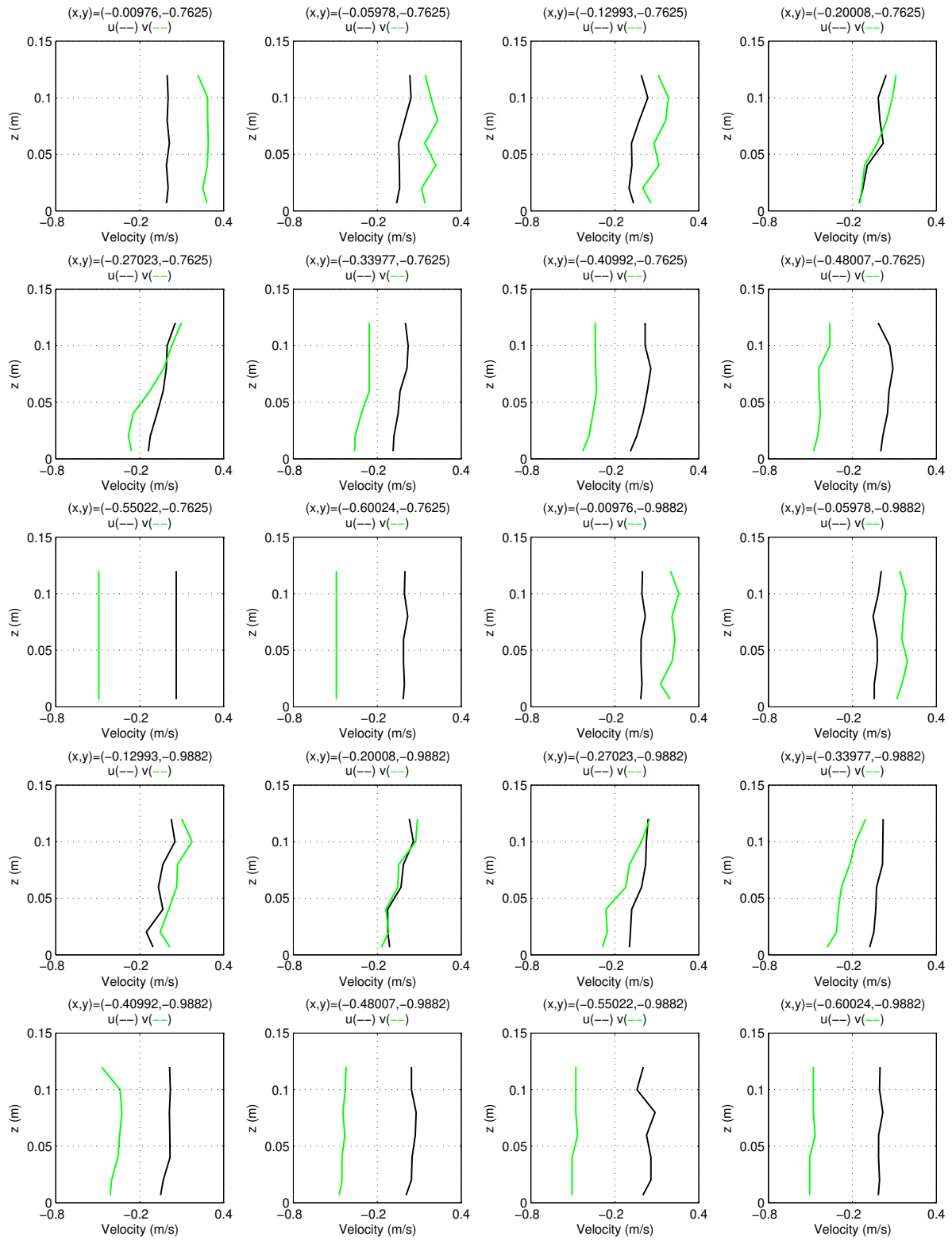


Figura E.21: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

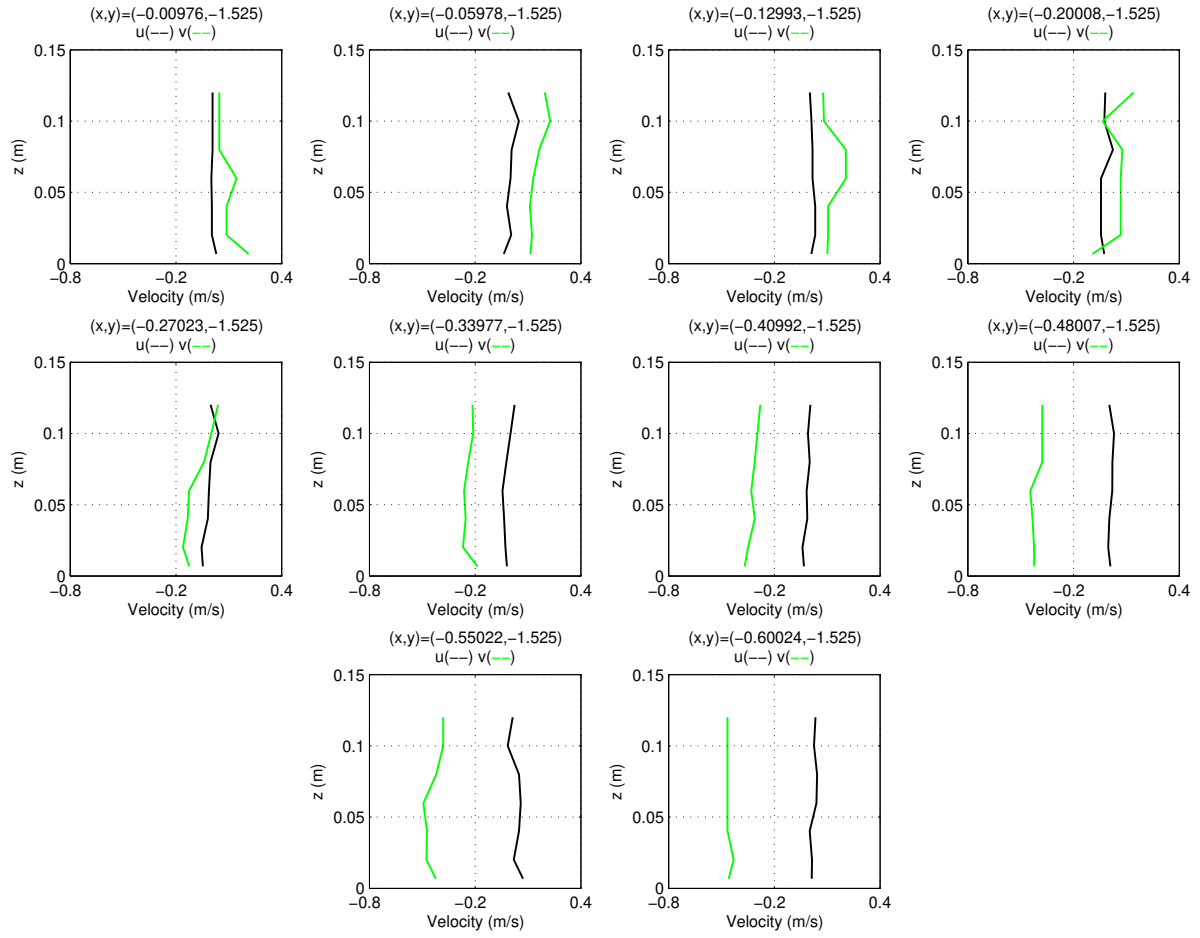


Figura E.22: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.

E.4. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,672$

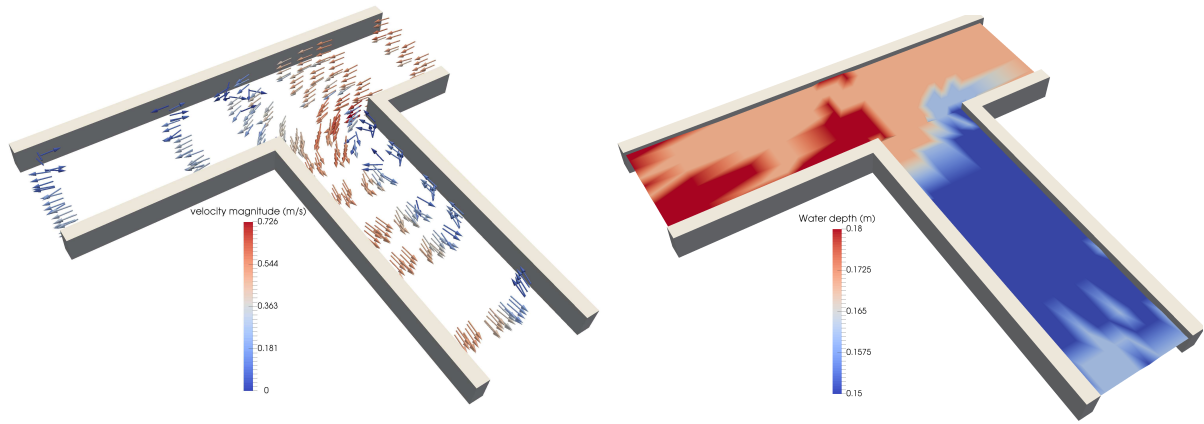


Figura E.23: Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,672$.

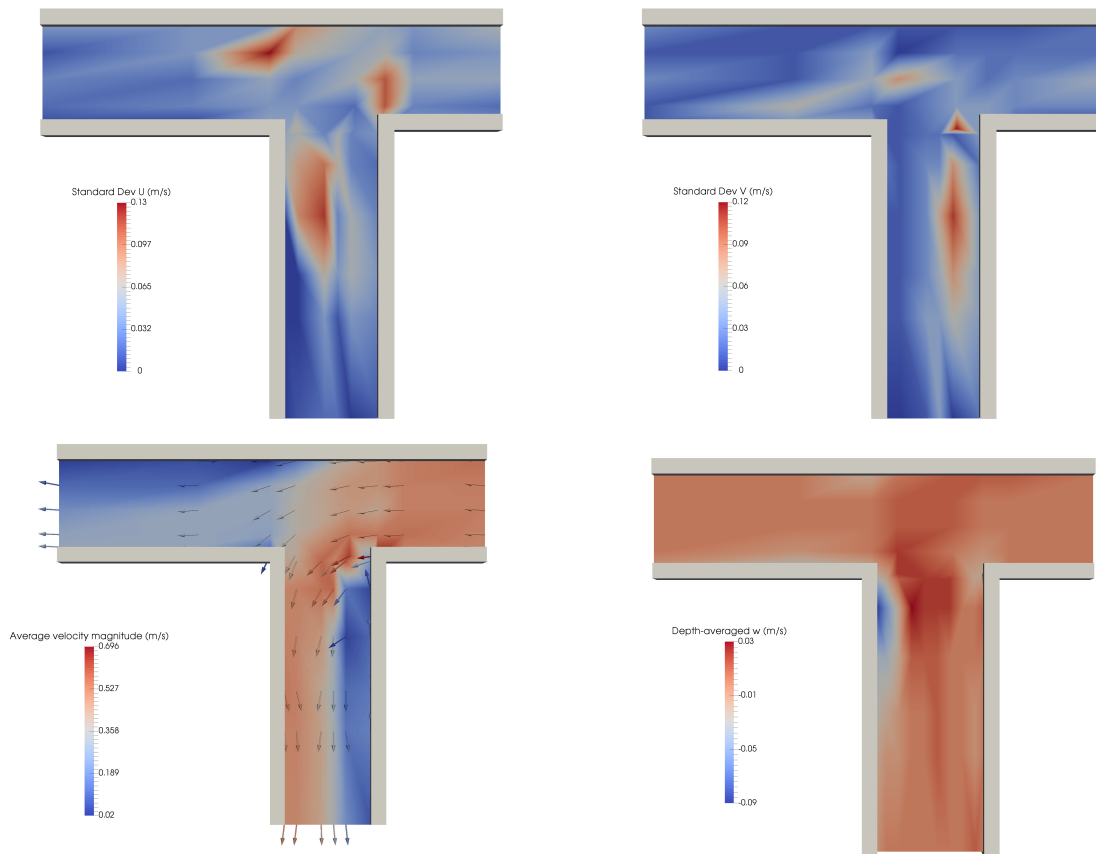
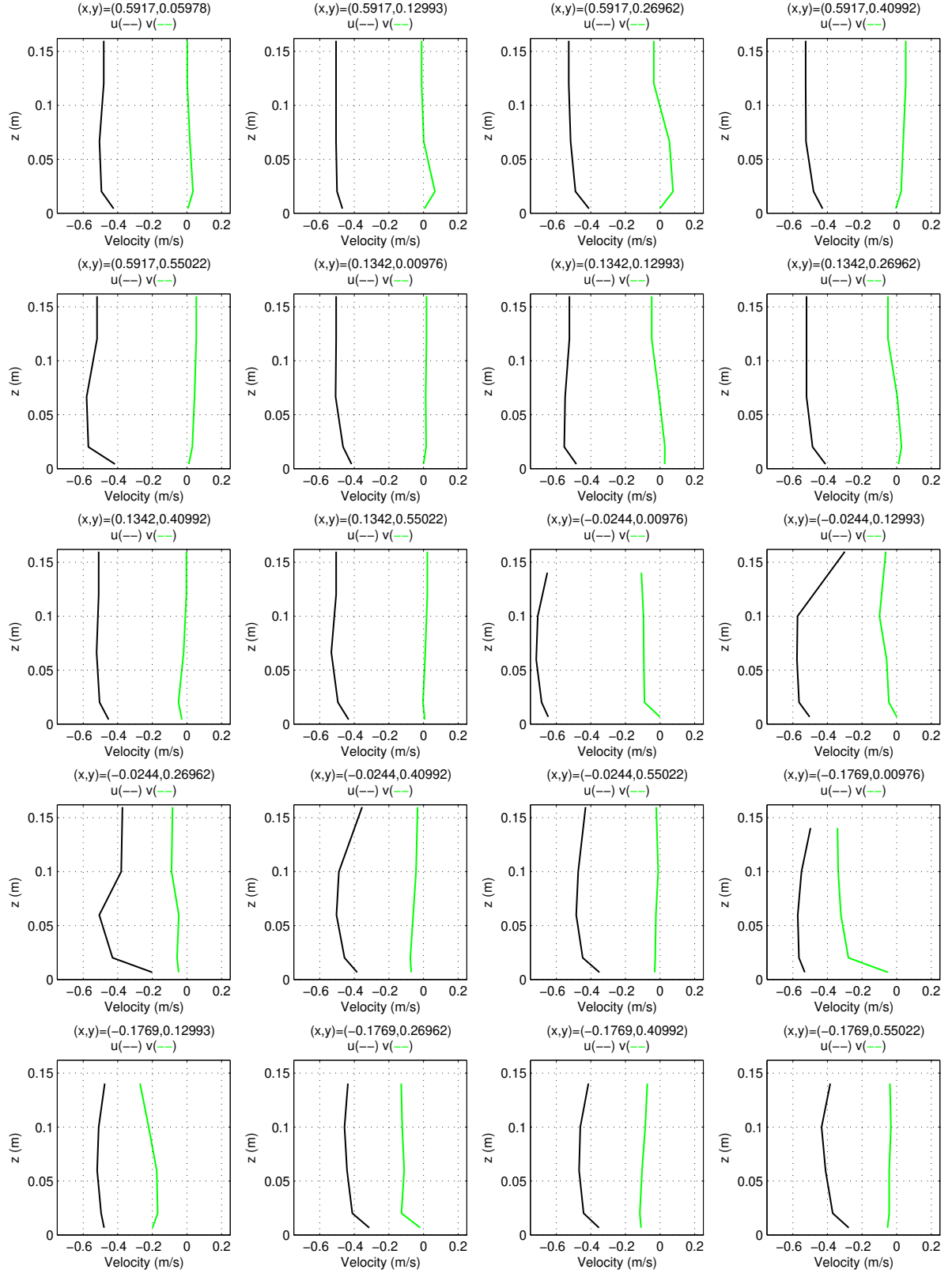


Figura E.24: Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,672$.

E.4.1. Velocity profiles

Figure E.25: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.

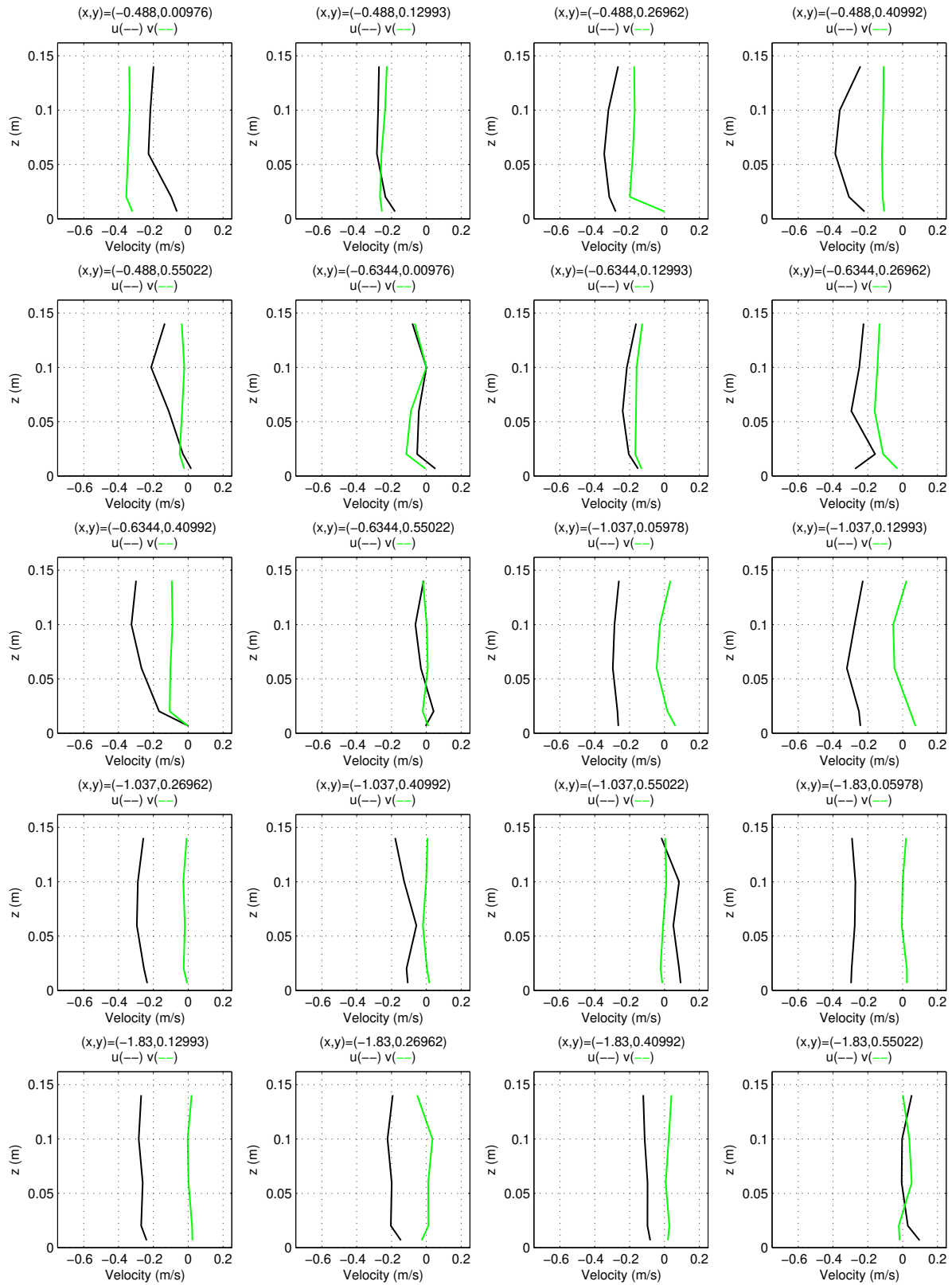


Figura E.26: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.

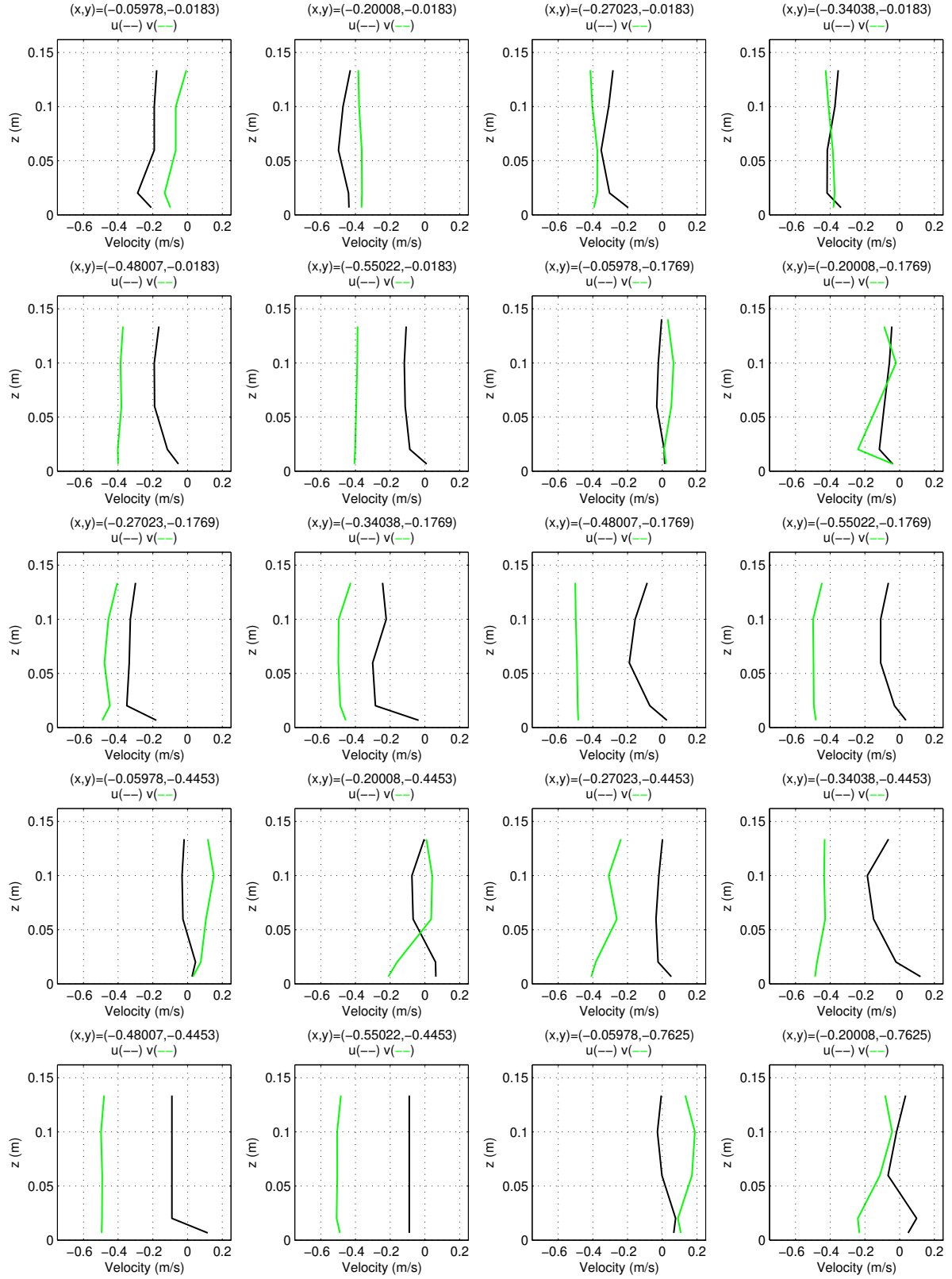


Figura E.27: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.

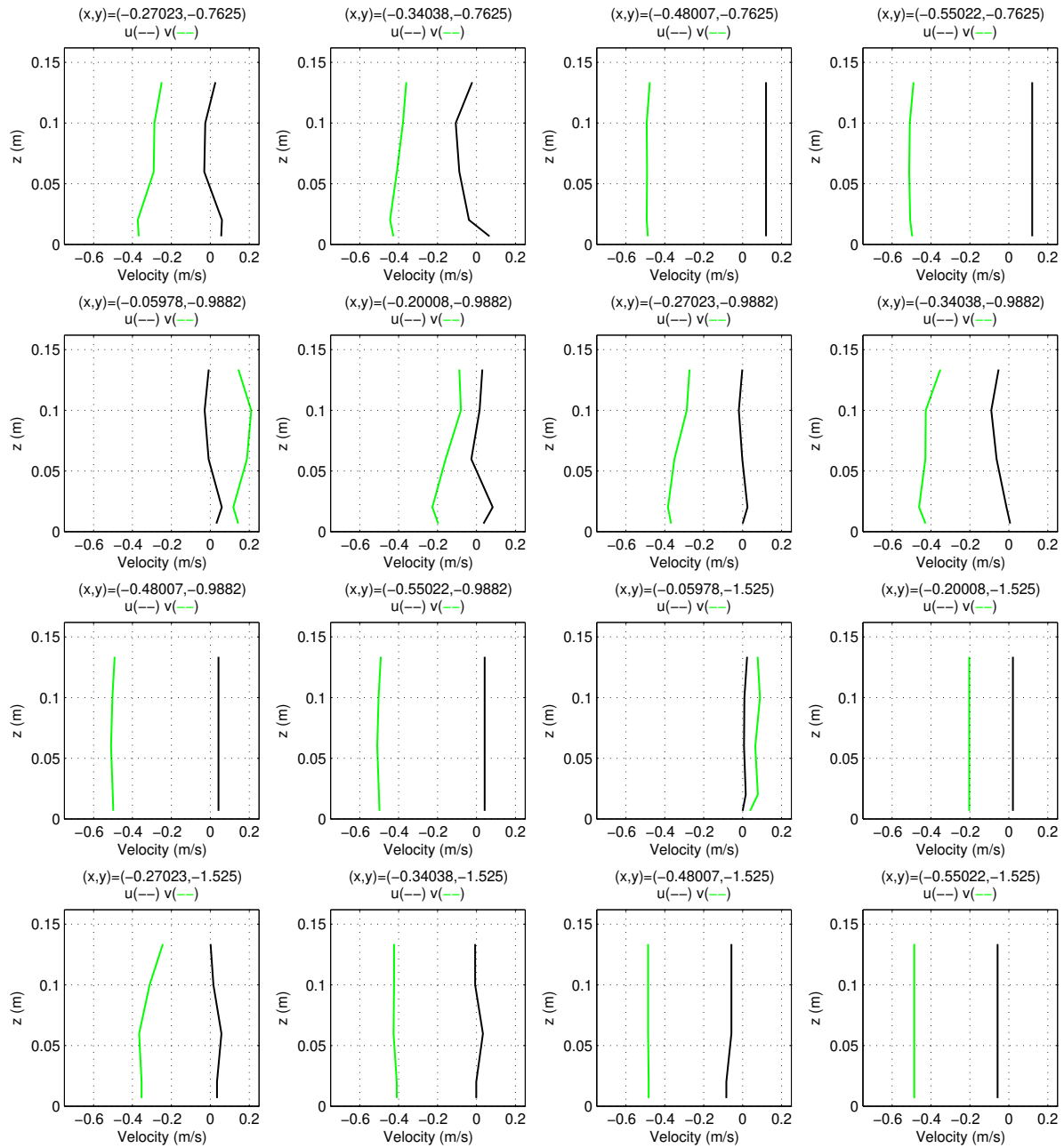


Figura E.28: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.

E.5. Graphical representation corresponding to $Q_r = 0,838$

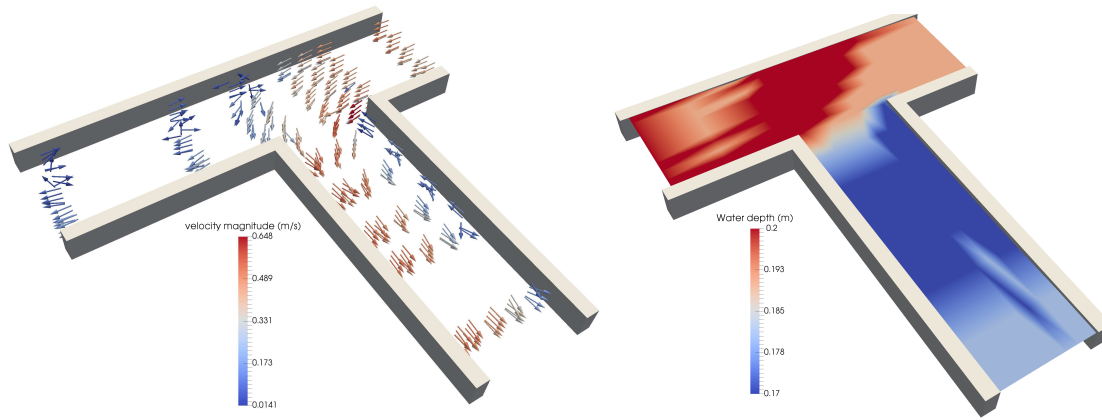


Figura E.29: Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,838$.

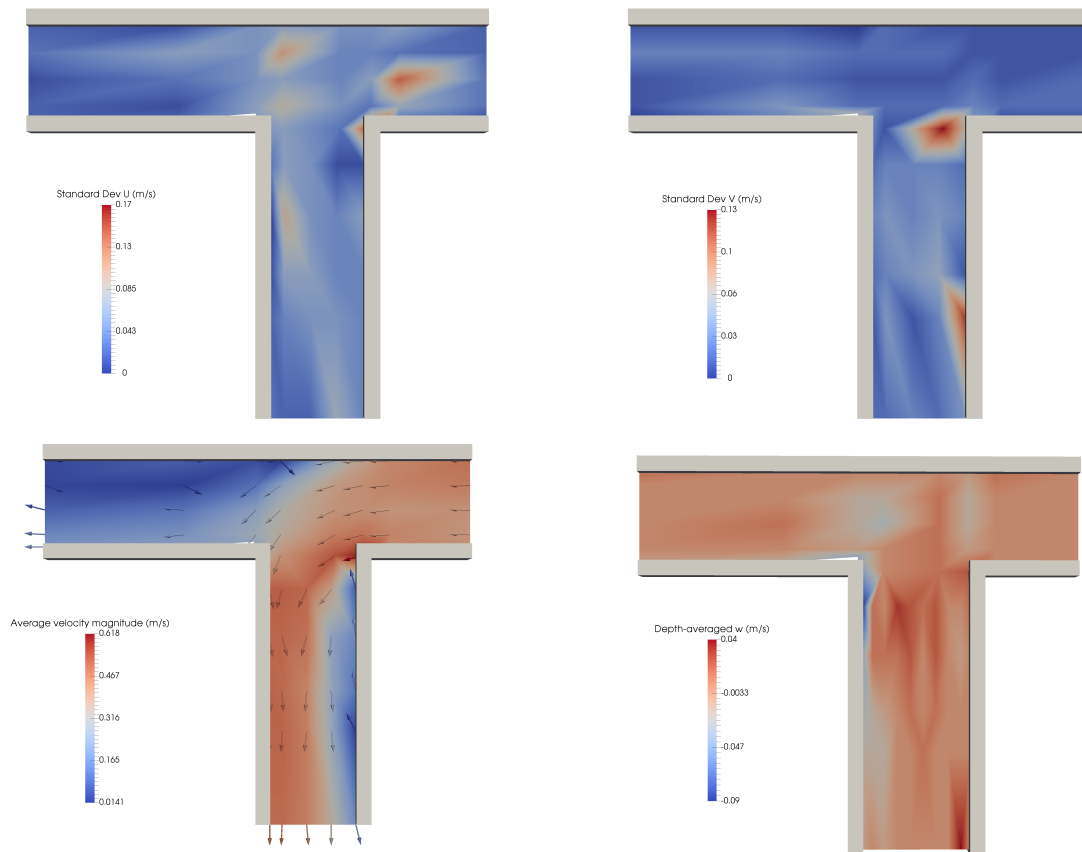


Figura E.30: Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,838$.

E.5.1. Velocity profiles

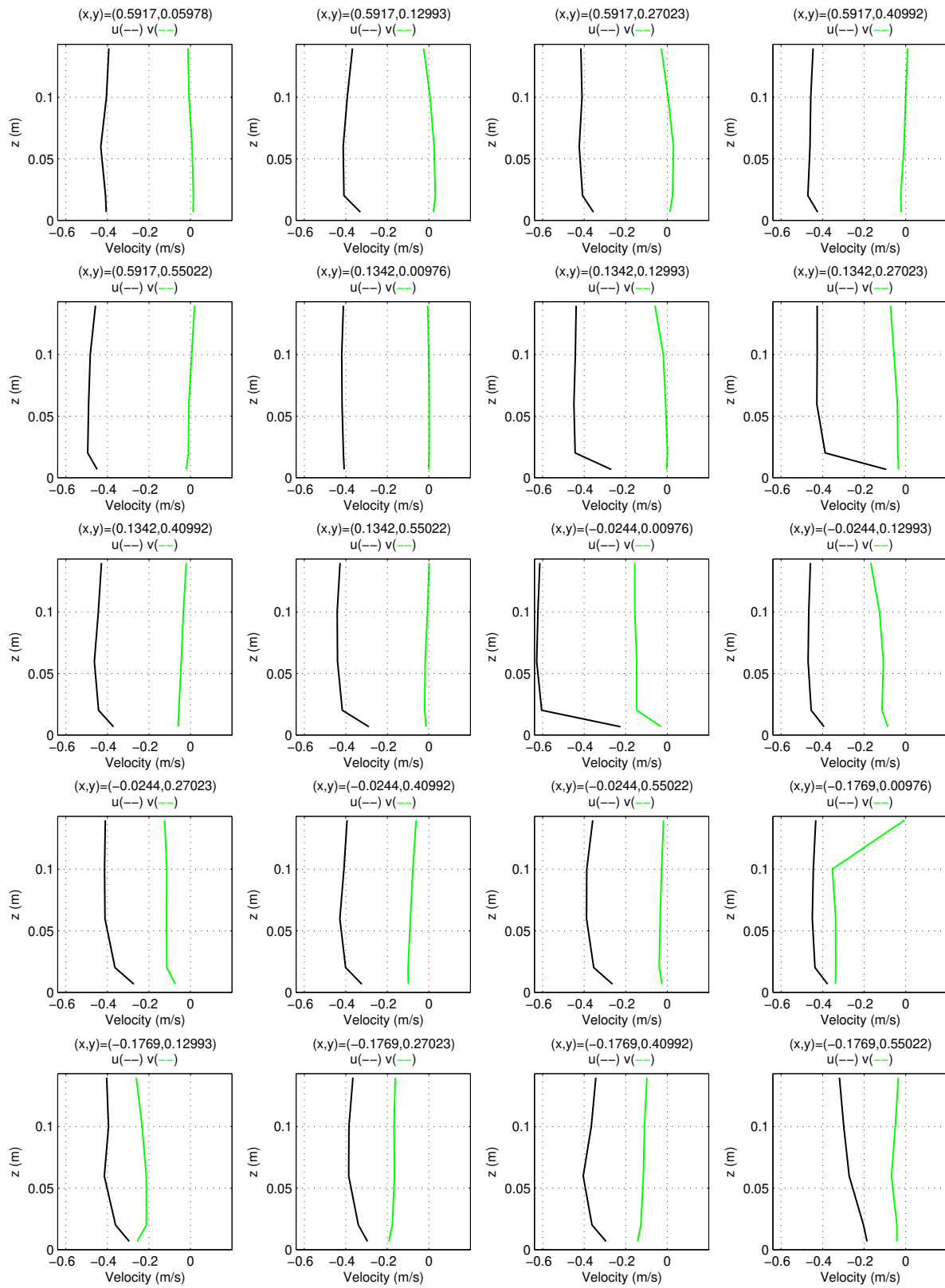


Figure E.31: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.

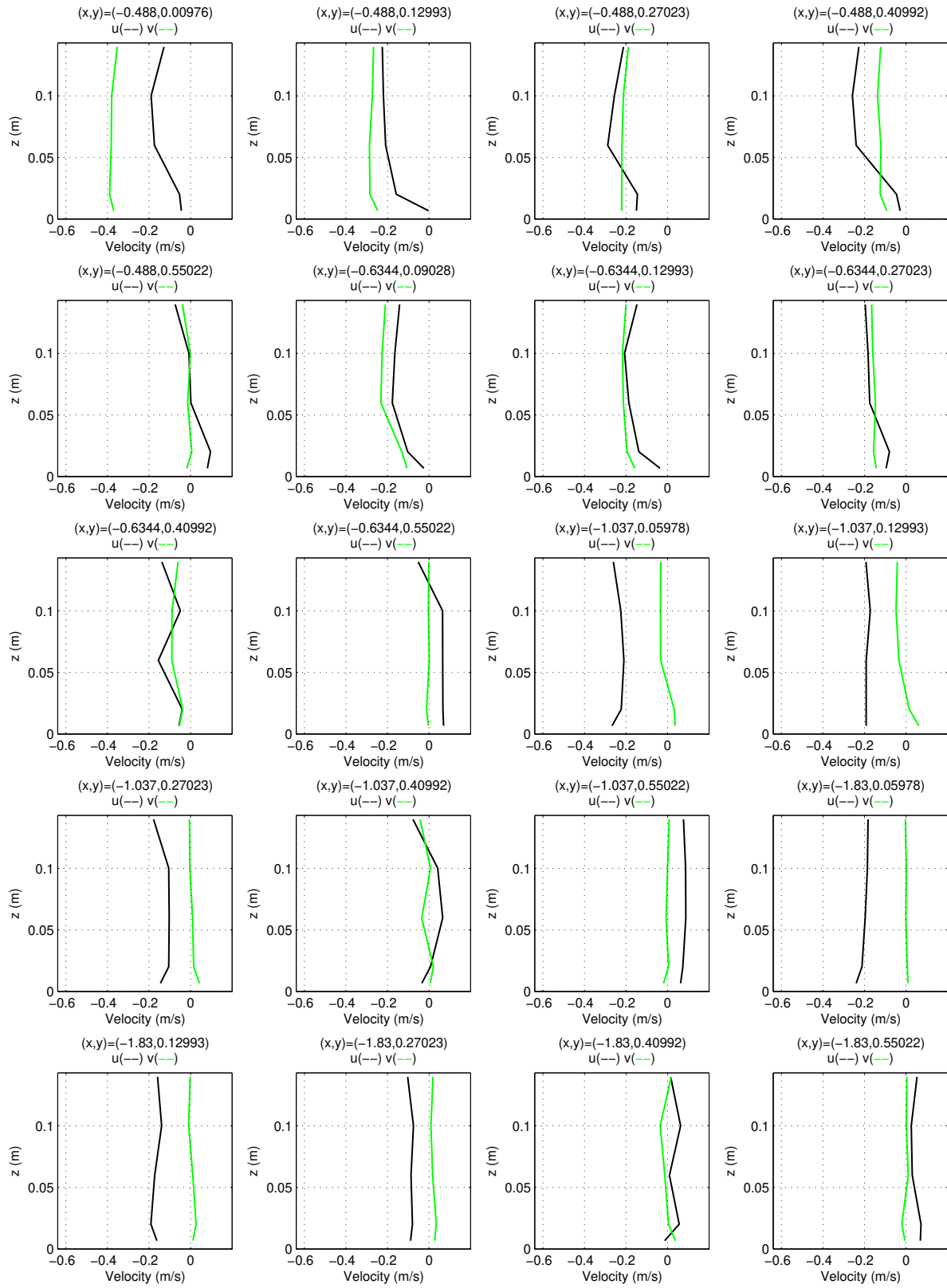


Figura E.32: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.

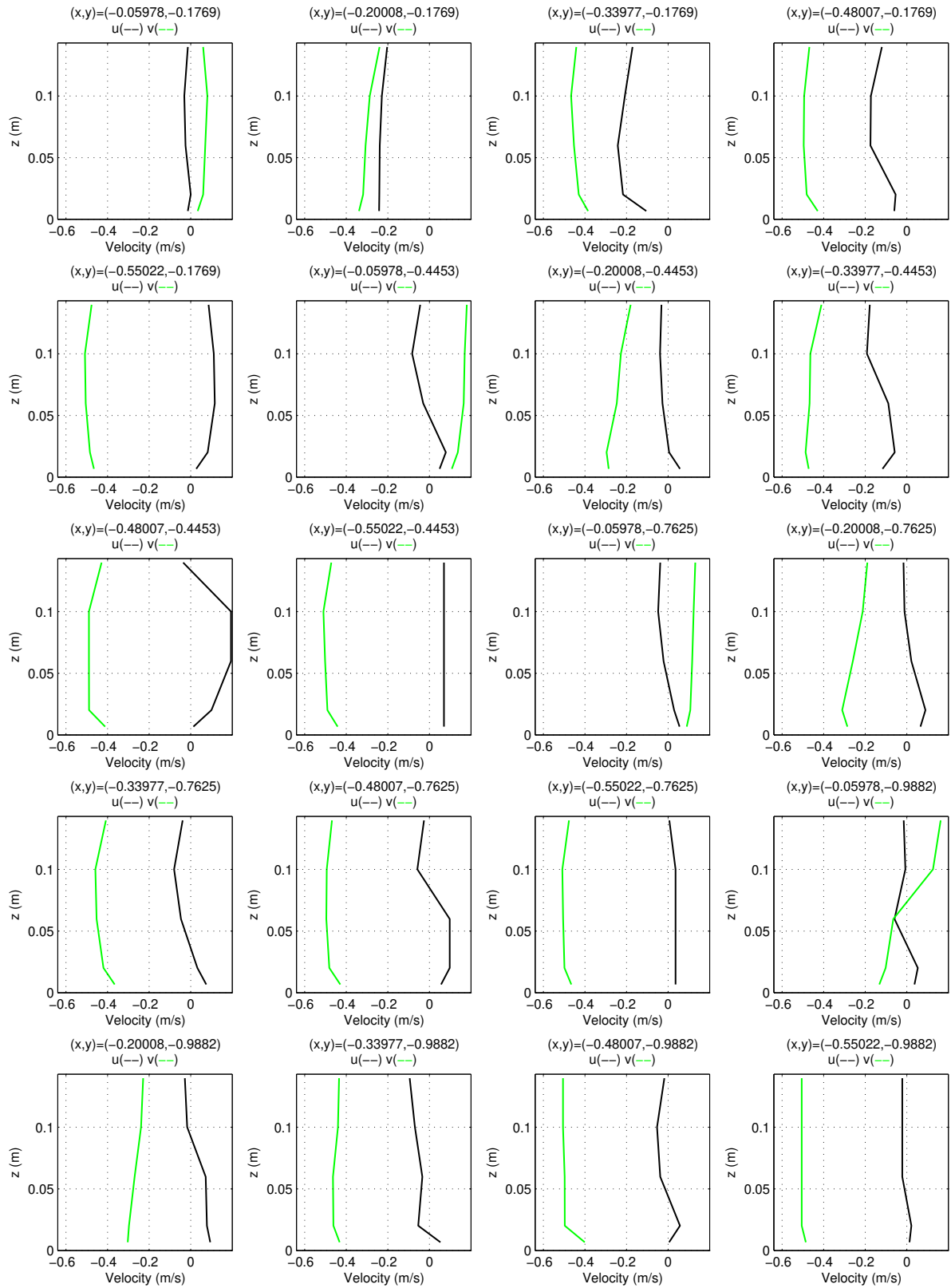


Figura E.33: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.

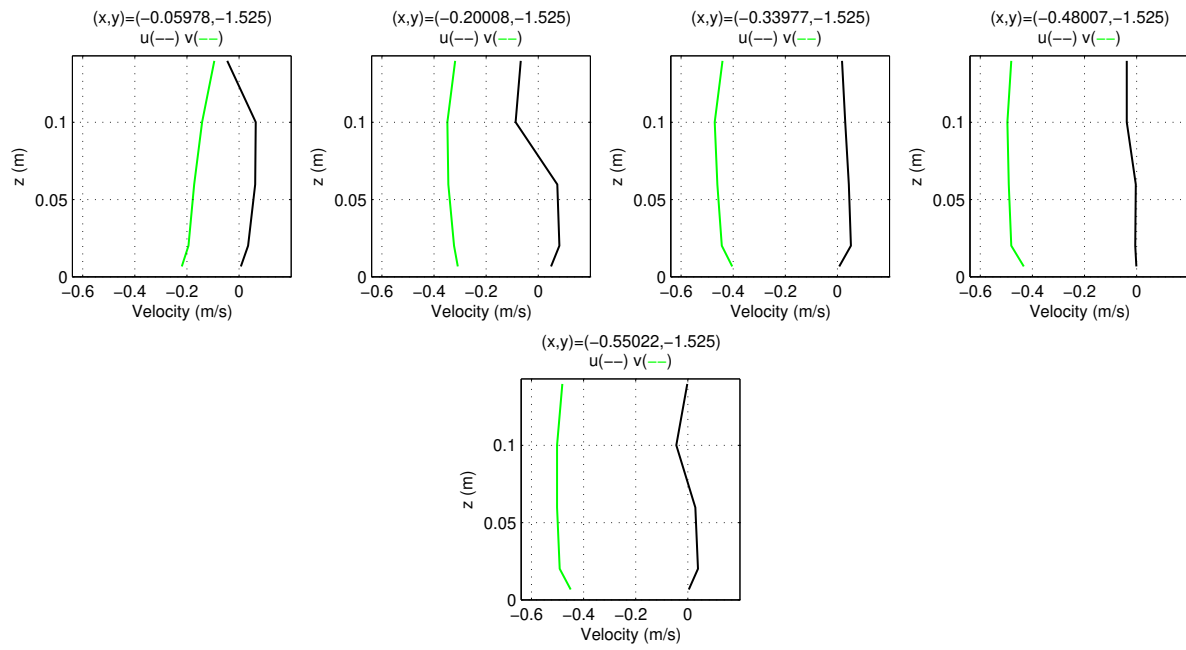


Figura E.34: Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.

E.6. Script 1. Experimental velocity and water height

This script reads the *.mat* file previously created with Matlab. Then it uses a provided script (called *vtkwrite*) to create *.vtk* files with the information read from the *.mat*.

The parameters to change in order to obtain the information for each Q_r are:

- The *.mat* file directory path to read from.
- The file directory path where the *.vtk* file will be saved in.

```

1 % To visualize:
2 % -Open Paraview: load>file_name.vtk.
3 % -Filter "glyph" over data set to see vectors.
4 % -Filter "delaunay2D" over data set to interpolate to a surface
5 % through delaunay triangulation.
6 %% CASE T DATA LECTURE
7 B=0.61; %Constant (channel width) to multiply for to dimensionalize
      numbers
8 %in tables.
9 titleVec='velocity_magnitude_(m/s)';
10 titleEsc='Water_depth';
11 %For the water surface, x,y and z are selected and z is given as another
12 %scalar h.
13
14 %Velocities.
15 load('caso_0.149/velocidades0,149.mat')
16 x=XB*B;
17 y=YB*B;
18 z=ZB*B;
19 u=U;
20 v=V;
21 w=W;
22 filename='caso_0.149/velocidades.vtk';
23 vtkwrite(filename,'unstructured_grid',x,y,z,'vectors',titleVec,u,v,w)
24
25 %Water surface
26 load('caso_0.149/calados0,149.mat')
27 x=XB*B;
28 y=YB*B;
29 z=ZB*B;
30 h=z;
31 filename2='caso_0.149/calados.vtk';
32 vtkwrite(filename2,'unstructured_grid',x,y,z,'scalars',titleEsc,h)

```

E.7. Script 2. Average velocity, standard deviation and .eps files

This script reads the *.mat* file previously created with Matlab. It scans the components x and y and looks for the same pair of coordinates, saving their different values of u and v for every height in the coordinate z available. After doing so, it renames these components with 999. Just not to overwrite previous values.

Then the trapezoid rule is applied over these values of u and v for each pair of coordinates (x, y) . After all, vectors with x, y, \bar{u} and \bar{v} are obtained.

As the different velocities for each profile have also been saved, plots for each one are obtained.

Standard deviations for \bar{u} and \bar{v} are calculated as well.

Information regarding velocity average and both standard deviations $\sigma_{\bar{u}}$ and $\sigma_{\bar{v}}$ is saved into .vtk files by using vtkwrite again.

The parameters to change in order to obtain the information for each Q_r are:

- The .mat file directory path to read from.
- The file directory path where the .eps plots will be saved in.
- The file directory path where the .vtk files will be saved in.

```

1 %Velocities are read and the average of the velocity in the vertical
2 %coordinate is calculated.
3 load('caso_0.838/velocidades0,838.mat')
4 B=0.61;
5 x=XB*B;
6 y=YB*B;
7 z=ZB*B;
8 u=U;
9 v=V;
10 w=W;
11
12 N=length(x)
13 p=1;
14 for i=1:N
15     if (x(i)<999) || (y(i)<999)
16         i;
17         x_aux=x(i);
18         y_aux=y(i);
19         clear z_t u_t v_t
20         k=1;
21         for j=1:N
22             if (x(j)<999) || (y(j)<999)
23                 if (x(j)==x_aux) && (y(j)==y_aux)
24                     z_t(k)=z(j);
25                     u_t(k)=u(j);
26                     v_t(k)=v(j);
27                     w_t(k)=w(j);
28                     x(j)=999;
29                     y(j)=999;
30                     k=k+1;
31                 end
32             end
33         end
34
35         n=length(u_t);
36         int_u=0;
37         int_v=0;
38         int_w=0;
39         for b=1:n-1 %Trapezoid rule is applied to approximate the integral
40             trapecio_u=((u_t(b)+u_t(b+1))/2)*(z_t(b+1)-z_t(b));
41             int_u=int_u+trapecio_u;
42             trapecio_v=((v_t(b)+v_t(b+1))/2)*(z_t(b+1)-z_t(b));
43             int_v=int_v+trapecio_v;
44             trapecio_w=((w_t(b)+w_t(b+1))/2)*(z_t(b+1)-z_t(b));

```

```

45         int_w=int_w+trapecio_w;
46     end
47     int_u=int_u/(z_t(n)-z_t(1));
48     int_v=int_v/(z_t(n)-z_t(1));
49     int_w=int_w/(z_t(n)-z_t(1));
50
51     x_2d(p)=x_aux;
52     y_2d(p)=y_aux;
53     u_2d(p)=int_u;
54     v_2d(p)=int_v;
55     w_2d(p)=int_w;
56
57     %eps images are saved with both names, image# and coordinates for
58     %each velocity profile in a given pair of coordinates.
59     %figure('Position', [0 0 250 250]);
60     %hold on;
61     %box on;
62     %set(gca,'layer','top','FontSize',10);
63     %grid on;
64     %ylim([0 0.143])
65     %xlim([-0.64 0.2])
66     %hXLabel = xlabel('Velocity (m/s)');
67     %hYLabel = ylabel('z (m)');
68     %plot(u_t,z_t,'Color','k','LineStyle','--','LineWidth',1.2);
69     %plot(v_t,z_t,'Color','g','LineStyle','--','LineWidth',1.2);
70     %txt1 = strcat('(x,y)=(',num2str(x_2d(p)),',',num2str(y_2d(p)),')
71     ');
72     %title({txt1;'u(--) v({\color{green}--})'});
73     %hold off;
74     %filename1 = strcat('caso_0.838/images/imag/image',num2str(p),'.
75     eps');
76     %filename2 = strcat('caso_0.838/images/coord/',txt1,'.eps');
77
78     %set(gcf,'PaperPositionMode','auto');
79     %print('-depsc2',filename1);
80     %print('-depsc2',filename2);
81     %Standard deviations are calculated.
82     numerador_u=0;
83     for H=1:n
84         numerador_u=numerador_u+(u_2d(p)-u_t(H))^2;
85     end
86     desv_u_2d(p)=(numerador_u/n)^(1/2);
87     numerador_v=0;
88     for H=1:n
89         numerador_v=numerador_v+(v_2d(p)-v_t(H))^2;
90     end
91     desv_v_2d(p)=(numerador_v/n)^(1/2);
92     p=p+1;
93 end
94 long=length(u_2d);
95 epsi_average=0;%Defined parameter to measure de 2-dimensionality.
96 max_epsilon=0;
97 for L=1:long
98     dos_D(L)=abs(w_2d(L))/(sqrt(power(u_2d(L),2)+(power(v_2d(L),2))));
99     epsi_average=epsi_average + dos_D(L);

```

```

100 end
101 epsi_average = epsi_average/long %Which represents the average for the
    whole T-branching channel.
102     numerador_epsi=0;
103     for H=1:long
104         numerador_epsi=numerador_epsi+(epsi_average-dos_D(H))^2;
105     end
106     desv_epsi=(numerador_psi/long)^(1/2)
107 max_epsi = max(dos_D)
108 z_2d(long)=0;
109 %.vtk files are saved with the information regarding velocity average,
    standard deviations and $w$.
110 %titleVec='Average_velocity_magnitude_(m/s)';
111 %filename='caso_0.838/2D/velocidades.vtk';
112 %vtkwrite(filename,'unstructured_grid',x_2d,y_2d,z_2d,'vectors',titleVec
    ,u_2d,v_2d,w_2d);
113 %filename2='caso_0.838/2D/DesvTip2D.vtk';
114 %titleEsc1='Standard_Dev_U';
115 %titleEsc2='Standard_Dev_V';
116 %vtkwrite(filename2,'unstructured_grid',x_2d,y_2d,z_2d,'scalars',
    titleEsc1,desv_u_2d,'scalars',titleEsc2,desv_v_2d);
117 %close all %To close all plots.
118 %titleEsc3='Depth-averaged_w'; %Only for Q_r with vertical values of
    velocity (w).
119 %filename='caso_0.838/2D/w_2d.vtk';
120 %vtkwrite(filename,'unstructured_grid',x_2d,y_2d,z_2d,'scalars',
    titleEsc3,w_2d);

```

E.8. Script 3. A matter of organization

This script has been written to organize in a simple way the order of appearance of the 3D and 2D representations shown in appendix E. It writes into a *.tex* file the given order that these representations have by just changing the available number of profiles for each Q_r and the last 3 ciphers of the same Q_r . For example, if, for $Q_r = 0,838$ there are 65 available velocity profiles, line 1 will equal 65 and line 2 will equal 838.

```

1 n_profiles = 70; %to vary for each Q_r
2 Q_r = '149'; %to vary for each Q_r
3 str = char(Q_r);
4 fileID = fopen(strcat(Q_r,'.tex'),'w');
5 p= fix(n_profiles/20);
6 %3D representations of the open channel
7 fprintf(fileID,'\section{Graphical representation corresponding to $Q_r$
    =0.}');
8 fprintf(fileID,str);
9 fprintf(fileID,'$\}$ \\\label{Q_r=0.}');
10 fprintf(fileID,str);
11 fprintf(fileID,'}\n');
12 fprintf(fileID,'\\begin{figure}[h!]\n');
13 fprintf(fileID,'\\centering\n');
14 fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');
15 fprintf(fileID,str);
16 fprintf(fileID,'/3dv');
17 fprintf(fileID,'.eps}\n');
18 fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');

```

```

19 fprintf(fileID,str);
20 fprintf(fileID,'/3dh');
21 fprintf(fileID,'.eps\n');
22 fprintf(fileID,'\\caption{Left: Experimental velocity field. Right:
    Experimental water depth. Corresponding to $Q_r=0.$}');
23 fprintf(fileID,str);
24 fprintf(fileID,'$.}\n');
25 fprintf(fileID,'\\label{');
26 fprintf(fileID,str);
27 fprintf(fileID,'Experimental}\n');
28 fprintf(fileID,'\\end{figure}\n');
29 %2D representations of the open channel
30 fprintf(fileID,'\\begin{figure}[h!]\n');
31 fprintf(fileID,'\\centering\n');
32 fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');
33 fprintf(fileID,str);
34 fprintf(fileID,'/sigma_u');
35 fprintf(fileID,'.eps\n');
36 fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');
37 fprintf(fileID,str);
38 fprintf(fileID,'/sigma_v');
39 fprintf(fileID,'.eps\n');
40 fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');
41 fprintf(fileID,str);
42 fprintf(fileID,'/2dv');
43 fprintf(fileID,'.eps\n');
44 %fprintf(fileID,'\\includegraphics[width=0.49\\textwidth]{EPS}');
45 %fprintf(fileID,str);
46 %fprintf(fileID,'/w');
47 %fprintf(fileID,'.eps\n');
48 %Line 50 is to be used when no data for w are available. That is to
49 %say, for $Q_r = 0.149$ or $0.308$. Otherwise, lines 44-47 and 51 will be
    used instead.
50 fprintf(fileID,'\\caption{Upper left: Standard deviation $\\sigma_{\\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\\sigma_{\\bar{v}}$. Center:
    Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Corresponding to $Q_r
    =0.$}');
51 %fprintf(fileID,'\\caption{Upper left: Standard deviation $\\sigma_{\\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\\sigma_{\\bar{v}}$. Lower
    left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right:
    Depth-averaged vertical velocity, $\\bar{w}$. Corresponding to $Q_r
    =0.$}');
52 fprintf(fileID,str);
53 fprintf(fileID,'$.}\n');
54 fprintf(fileID,'\\label{');
55 fprintf(fileID,str);
56 fprintf(fileID,'Calc}\n');
57 fprintf(fileID,'\\end{figure}\n');
58 fprintf(fileID,'\\clearpage\n');
59 fprintf(fileID,'\\subsection{Velocity profiles} \\label{profiles}');
60 fprintf(fileID,str);
61 fprintf(fileID,'}\n');
62 %Velocity profiles
63 for i=1:(p+1)
64 fprintf(fileID,'\\begin{figure}[h!]\n');
65 fprintf(fileID,'\\centering\n');
66 counter = 0;

```

```

67     for j=(20*(i-1)+1):20*i
68         if j <= n_profiles
69             fprintf(fileID, '\\includegraphics[width=0.24\\textwidth]{EPS}');
70             fprintf(fileID, str);
71             fprintf(fileID, '/Profiles/image');
72             fprintf(fileID, num2str(j));
73             fprintf(fileID, '.eps}\\n');
74         end
75     end
76     fprintf(fileID, '\\caption{Velocity profiles corresponding to $Q_r=0.$}');
77     fprintf(fileID, str);
78     fprintf(fileID, '$. Coordinates in meters.}\\n');
79     fprintf(fileID, '\\label{Profiles}');
80     fprintf(fileID, str);
81     fprintf(fileID, num2str(i));
82     fprintf(fileID, '}\\n');
83     fprintf(fileID, '\\end{figure}\\n');
84     fprintf(fileID, '\\clearpage\\n');
85 end;
86 fclose(fileID);

```


Bibliografía

- [1] D. Lars, An introduction to turbulence models. Department of thermo and fluid dynamics. Chalmers University Of Technology, Gothenburg, Sweden (September 2017).
- [2] H. Tennekes and J.L. Lumley, A First Course in Turbulence. The MIT Press (1972).
- [3] C. Juez, M. Thalmann, A.J. Schleiss, M.J. Franca, Morphological resilience to flow fluctuations of fine sediment deposits in bank lateral cavities. *Advances in Water Resources* 115 (2018) 44–59.
- [4] P. Bradshaw, An Introduction to Turbulence and its Measurement. Aeronautics Department, Imperial College of Science and Technology (1971).
- [5] G. G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. IX (1850).
- [6] O. Reynolds, An experimental Investigation of the circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Paralell Channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 174 (1883).
- [7] E.F. Toro, R.C. Millington, L.A.M. Nejad, Towards very high order Godunov schemes, E.F. Toro (Ed.), *Godunov Methods. Theory and Applications*, Kluwer/Plenum Academic Publishers (2001), pp. 907-940.
- [8] E.F. Toro, V.A. Titarev, Titarev ADER schemes for scalar hyperbolic conservation laws with source terms in three space dimensions. *J. Comput. Phys.*, 202 (1) (2005), pp. 196-215.
- [9] O. Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 186 (1895).
- [10] A. Crespo Martínez, *Mecánica de fluidos*. Paraninfo (2017).
- [11] Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie, Keith W. Bedford, *Mecánica de fluidos*. McGrawHill (1999).
- [12] P. Sagaut, S. Deck, M. Terracol, *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*. Imperial College Press (2006).
- [13] Stephen B. Pope, *Turbulent Flows*. Cornell University. Cambridge University Press (2000).
- [14] A. Sanchez-Lavega, G.S. Orton, R. Morales, The Merger of Two Giant Anticyclones in the Atmosphere of Jupiter. *Icarus*, Vol. 149, Issue 2, February 2011, pp. 491-495.
- [15] M.M. Farazmand, N.K.-R. Kevlahan and B. Protas, Controlling the dual cascade of two-dimensional turbulence. School of Computational Engineering & Science, Department of Mathematics & Statistics, McMaster University, Canada (2010).
- [16] P. García-Navarro, P. Brufau, J. Burguete and J. Murillo, The shallow water equations: An example of hyperbolic system. *Fluid Mechanics*. CPS. University of Zaragoza (2008).
- [17] Weiming Wu, Pingyi Wang, Nobuyuki Chiba, Comparison of Five Depth-Averaged 2-D Turbulence Models for River Flows (2004).

- [18] Roland M. B. Young and Peter L. Read, Forward and inverse kinetic energy cascades in Jupiter's turbulent weather layer (2017).
- [19] G.K. Batchelor, An introduction to fluid dynamics. Cambridge university press (1967).
- [20] C.B.Vreugdenhil, Numerical methods for shallow-water flow. Kluwer Academic Publishers (1994).
- [21] Z.Warhaft, Passive Scalars in Turbulent Flows. Annual Rev. Fluid Mech. 32:203-240(2000).
- [22] L. Prandtl, Essentials of Fluid Dynamics. Hafner Publications, New York (1952).
- [23] L. Prandtl, Essentials of Fluid Dynamics. Ed. Springer. Herbert Oertel as the editor. Applied mathematical sciences, Vol. 158 (2004).
- [24] B. Yulistiyanto, Y. Zech and W.H. Graf., Flow around a cylinder: Shallow water modeling with diffusion-dispersion. J. of Hyd. Eng. 124(4):419-429 (1998).
- [25] Luis Cea Gómez, An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts: Numerical solver and experimental validation. Tesis doctoral. Universidad de A Coruña (2005).
- [26] S. Fujiwhara, The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology (1921).
- [27] J. Burguete, P. García-Navarro, J. Murillo and I.García-Palacín, Analysis of the Friction Term in the One-Dimensional Shallow-Water Model (2007).
- [28] D. Clemens, Z. Gerald, The depth-averaged Mixing Length turbulence model for Telemac-2D. Hydraulic engineering repository (2016).
- [29] Jia Y., Wang S.S.Y., Numerical model for channel flow and morphological change studies. Journal of Hydraulic Engineering (ASCE), 125, 924-933 (1999).
- [30] Randall J. Leveque, Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge texts in applied mathematics (2004).
- [31] G. De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity. A bench mark numerical solution. International journal for numerical methods in fluids, vol 3, 249-264 (1983).
- [32] L. Cea, J. Puertas, M.E. Vázquez-Cendón, Depth Averaged Modelling of Turbulent Shallow Water Flow with Wet-Dry Fronts. Arch Comput Methods Eng (2007) 14: 303-341.
- [33] A. Navas-Montilla, J. Murillo, Asymptotically and exactly energy balanced augmented flux-ADER schemes with application to hyperbolic conservation laws with geometric source terms. Journal of Computational Physics 317 (2016) 108-147.
- [34] Saeed-Reza Sabbagh-Yazdi, Mojtaba Jamshidi, Depth-Averaged Hydrodynamic Model for Gradual Breaching of Embankment Dams Attributable to Overtopping Considering Suspended Sediment Transport. J. Hydraul. Eng., 2013, 139(6): 580-592.
- [35] Charles Hirsch, Numerical computation of internal & external flows. 2nd edition.
- [36] A. Navas-Montilla, J. Murillo, 2D Well-balanced Augmented ADER schemes for the Shallow Water Equations with bed elevation and extension to the rotating frame. Article in Journal of Computational Physics. June 2018.
- [37] Adrián Navas Montilla, Accurate simulation of shallow flows using arbitrary order ADER schemes and overcoming numerical shockwave anomalies. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza 2018.
- [38] L. Han, E. Mignot, N. Rivière, Turbulent Viscosity Concept Downstream an Open-Channel Sudden Expansion. Journal of Applied Fluid Mechanics , Vol. 9, No. 5, pp. 2311-2319, 2016.
- [39] Junying Qu, Three-dimensional turbulence modeling for free surface flows, A thesis in the department of Building, Civil and Environmental Engineering. Concordia University, Montreal, Quebec, Canada (May 2005).

- [40] Frank M. White, Fluid Mechanics 8th Ed, McGraw-Hill Education. (2015).
- [41] U.S. Department of the interior, Water measurement manual, A water resources technical publication (2001).
- [42] Harlan H. Bengtson, Sharp crested weirs for open channel flow measurement.

Lista de Figuras

1.1.	Imágen de la superficie de Júpiter, obtenida de la galería web de la sonda Juno de la NASA.	2
1.2.	Imagen comparativa de los resultados del transporte de un soluto al pasar por un obstáculo sólido con forma de cuadrado. En la parte de arriba se usa un esquema numérico de orden 3 y en la de abajo de orden 1. Se observa menor difusión numérica en la simulación de alto orden, así como estructuras más complejas.	3
3.1.	Izquierda: Ejemplo de una malla estructurada en la que cada celda tiene la misma forma y tamaño. Derecha: Ejemplo de malla no estructurada en la que el tamaño de celda ha sido refinado cerca de las paredes. Esto se realiza normalmente para imponer la condición de no deslizamiento en las paredes, haciendo así un cambio más suave de las velocidades.	10
3.2.	Representación de los flujos entrantes y salientes a la celda Ω_{ij} .	10
3.3.	Representación de los flujos salientes en la pared derecha de la celda Ω_{ij} al usar un esquema numérico de tercer orden.	11
3.4.	Stencil usado para la discretización de $\partial v / \partial x$ en la pared superior de la celda Ω_{ij} .	13
4.1.	Detalles del experimento de una expansión repentina donde se midieron los valores de la componente horizontal de velocidad a lo largo de las secciones marcadas con línea discontinua. Las distancias están en metros.	16
4.2.	Detalles de las dimensiones del experimento con un canal en forma de T.	16
4.3.	Zonas relevantes que aparecen en un canal en T.	17
5.1.	Errores absolutos de las derivadas $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ de la función Gaussiana elegida. Se corresponden con las dos mallas, una de 20×20 ($\Delta x = 5 \text{ m}$) y otra de 200×200 ($\Delta x = 0,5 \text{ m}$).	20
5.2.	Representación de la norma L_1 de error multiplicada por el área de celda vs el número de celdas en la dirección x o en y de la malla cartesiana sobre la que se ha llevado a cabo el análisis de convergencia. Se observa que la discretización de las derivadas propuesta converge a la solución analítica con orden 2.	21
5.3.	Izquierda: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 1 en $t = 400s$ con un esquema de orden 1. Derecha: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 1 en $t = 400s$ con un esquema de orden 3.	23
5.4.	Izquierda: Solución analítica y resultados numéricos del Caso 2 en $t = 400s$ con un esquema de orden 2 de los términos difusivos. Derecha: Detalle de la imagen izquierda donde se observa la convergencia a la solución analítica al refinar la malla.	23
5.5.	Dimensiones del dominio computacional en metros.	25
5.6.	Izquierda: Perfil de velocidad analítico $u(y)$ y resultados numéricos obtenidos con el esquema numérico de primer orden, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$. Derecha: Norma de error L_1 versus número de celdas en dirección y .	26

- 5.7. Izquierda: Perfil de velocidad analítico $u(y)$ y resultados numéricos obtenidos con el esquema numérico de tercer orden, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$. Derecha: Norma de error L_1 versus número de celdas en dirección y 27
- 5.8. Izquierda: Calado a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando la condición de contorno aguas abajo. Derecha: u a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando el desarrollo de la velocidad. Resultados numéricos con esquema de orden 3, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$ 27
- 5.9. Perfiles de velocidad para diferentes secciones transversales a lo largo del canal recto, mostrando el desarrollo del perfil de velocidades. Simulación con esquema numérico de orden 3, $\Delta x = 0,04 m$, $\nu = 0,001 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,001$ 27
- 5.10. Izquierda: Calado a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando la condición de contorno aguas abajo. Derecha: u a lo largo de la línea central del canal recto simulado, mostrando el desarrollo de la velocidad. Resultados con esquema numérico de orden 1, $\nu = 0,01 \frac{m^2}{s}$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,01$ 28
- 5.11. Gráfico de Err_{mean} vs λ en el caso de $\beta = 8$. Esquema numérico de orden 3. 29
- 5.12. Perfiles de velocidad de cinco configuraciones distintas de turbulencia. Esquema numérico de orden 3 con $\Delta x = 0,025 m$ 31
- 5.13. Representaciones de la velocidad horizontal promediada en el tiempo para 5 configuraciones distintas de turbulencia. Sin difusión, $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$, $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$, modelo de viscosidad parabólico y modelo de longitud de mezcla. 32
- 5.14. Representaciones de la velocidad horizontal para tres configuraciones diferentes. De arriba abajo, esquema numérico de primer orden con $\Delta x = 0,025 m$, esquema numérico de tercer orden con $\Delta x = 0,025 m$ y esquema numérico de tercer orden con $\Delta x = 0,1 m$ 32
- 5.15. Representación de las condiciones iniciales de caudales unitarios. 33
- 5.16. Gráficos correspondientes a los errores promedio en u and v vs λ para $\beta = 8$. Esquema numérico de orden 1. 34
- 5.17. Comparativas de tres refinamientos de malla distintos que muestran Err_j para las secciones transversales de 8 coordenadas x . $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Simulaciones con esquema numérico de primer orden. 36
- 5.18. Comparativas de tres refinamientos de malla distintos que muestran Err_n para las secciones transversales de 5 coordenadas y . $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Simulaciones con esquema numérico de primer orden. 37
- 5.19. Izquierda: Campo de magnitud de velocidad horizontal 2D tras haber promediado las velocidades experimentales en la vertical. Derecha: Campo de magnitud de velocidad horizontal producido por la simulación de esquema numérico de primer orden con $\lambda = 0,25$, $\beta = 8$ y $\Delta x = 0,007625 m$. Ambas imágenes corresponden a la misma escala de colores representada. 37
- 5.20. Izquierda: Calado experimental. Derecha: Calado en la simulación. Esquema numérico de orden 1 con $\lambda = 0,25$ y $\beta = 8$. Ambas imágenes corresponden a la misma escala de colores representada. 38
- A.1. Shallow water flow examples. Left: Artificial open channel flow. Right: Naturally-made zone. The water depth is represented by h , l_1 is the perpendicular length to the flow (or width) and l_2 is the longitudinal dimension in the direction of the flow. 43
- A.2. Left: Laminar flow. Center: Transition flow. Right: Turbulent flow. 44

A.3. Left: 3D energy cascade. Right: 2D energy cascade. The axis are in logarithmic scale in both cascades. $E(\kappa_L)$ represents the spectral density of energy [12] of the wave number $\kappa_L = \frac{1}{L}$. It is worth mentioning that the spectral density $E(\kappa)$ is low for very large or very small scales. It means that vortexes of the same scale than the flow dimensions will have almost no place. The same happens to those vortexes with a wave number of the order of molecular scales.	45
A.4. Plot of the axial component of velocity, measured in a point from the centerline of a turbulent jet vs time. Obtained from [21].	46
A.5. Cross-section of a given profile showing parameters h , z_b y z . Being them the water depth, the bed height and the vertical coordinate respectively.	47
B.1. Left: Example of a structured grid in which every cell has the same size and shape. Right: Example of a non-structured grid in which the cell size has been refined close to the walls. This is normally performed to impose the non-slip condition at the walls, making a smooth change of velocity when observing the profiles.	52
B.2. Representation of the incoming and outgoing fluxes in cell Ω_{ij}	53
B.3. Representation of the outgoing fluxes at the right wall of cell Ω_{ij} when using a 3rd order numerical scheme.	53
B.4. Region of cell Ω_i and representation of mean values of the conserved variables. RP (dashed line) in the interface of the right wall of a cell.	54
B.5. Representation of the outgoing and incoming fluxes in cell Ω_i	55
C.1. Representations of the chosen Gaussian function. Left: 20×20 grid. Right: 200×200 grid.	64
C.2. Representations of the derivative respect to x of the chosen Gaussian function. Left: 20×20 grid. Right: 200×200 grid.	64
C.3. Analytical and numerical representation of the derivative respect to y in a 20×20 grid. The absolute error can be observed on the right.	64
C.4. Analytical and numerical representations of the derivative respect to x in a 20×20 grid. The absolute error can be observed on the right.	64
C.5. Analytical and numerical representation of the derivative respect to y in a 200×200 grid. The absolute error can be observed on the right.	65
C.6. Analytical and numerical representations of the derivative respect to x in a 200×200 grid. The absolute error can be observed on the right.	65
C.7. Representation concerning norm 1 of the errors vector multiplied by the cell area versus number of cells in x or y direction of the cartesian grid used to carry out the convergence analysis. It is observed that the suggested discretization of the derivatives converges to the analytical solution with order 2.	65
C.8. Dimensions of the computational domain in meters. The water depth is 1 meter.	66
C.9. Left: Analytical velocity profile $u(y)$ and numerical results provided by the 1st order scheme. Right: $L1$ error norm vs number of cells in the y direction.	68
C.10. Left: Analytical velocity profile $u(y)$ and numerical results provided by the 3rd order scheme. Right: $L1$ error norm vs number of cells in the y direction.	68
C.11. Left: Water depth along the center line of the simulated rectilinear channel showing the the outlet boundary condition. Right: u along the center line of the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity. 3rd order simulations.	68
C.12. Velocity profiles for different cross sections along the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity profile. 3rd order simulations with $\Delta x = 0,04 m$	69

C.13.	Left: Water depth along the center line of the simulated rectilinear channel showing the outlet boundary condition. Right: u along the center line of the simulated rectilinear channel showing the development of the velocity. 1st order simulations with $\nu = 0,01 \frac{m^2}{s}$ and $\frac{\partial z}{\partial x} = 0,01$	69
C.14.	Experimental details of the sudden-expanded flume. Experimental values of x component of velocity, u , were collected along the sections represented by dashed lines. Distances are in meters.	70
C.15.	Plots corresponding to Err_{mean} vs λ for different values of β . 3rd order numerical scheme simulations.	74
C.16.	Comparison of two different ways of computing \mathbf{S}_f within the SWE. 3rd order numerical scheme.	75
C.17.	Set of velocity profiles for different values of n_w . 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$, $\lambda = 1,3$, $\beta = 7$, $y_w/4$	76
C.18.	Comparison of two different ways of computing \mathbf{D}_i , through the Boussinesq assumption and a simplified form of it (A.35). Both correspond to the same parameter configuration. 1st order numerical scheme.	77
C.19.	Comparison of two different ways of computing \mathbf{D}_i , through the Boussinesq assumption and a simplified form of it (A.35). Both correspond to the same parameter configuration. 3rd order numerical scheme.	78
C.20.	Set of velocity profiles for different values y_w is divided by. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$, $\lambda = 1,3$, $\beta = 7$, $n_w = 0,012 \frac{s}{m^{1/3}}$	79
C.21.	Set of velocity profiles for five different turbulence configurations. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$	80
C.22.	Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 1 turbulence configuration corresponding to nil diffusion. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$. . .	81
C.23.	Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 2 turbulence configuration corresponding to $\nu_e = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$. .	81
C.24.	Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 3 turbulence configuration corresponding to $\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$. .	81
C.25.	Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 4 turbulence configuration corresponding to the parabolic eddy viscosity model. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$	82
C.26.	Representations of horizontal velocity and eddy viscosity for case 5 turbulence configuration corresponding to the mixing length model. 3rd order numerical scheme results with $\Delta x = 0,025 m$	82
C.27.	Time-averaged horizontal velocity representations for the 5 different turbulence configurations. From top to bottom, no diffusion, $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$, $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$, parabolic eddy viscosity model and mixing length model.	83
C.28.	Set of velocity profiles for three different cell sizes. 1st order numerical scheme results. . .	84
C.29.	Set of velocity profiles for three different cell sizes. 3rd order numerical scheme results . .	85
C.30.	Set of velocity fields for three different configurations. From top to bottom, 1st order $\Delta x = 0,025 m$, 3rd order $\Delta x = 0,025 m$ and 3rd order $\Delta x = 0,1 m$	86
C.31.	From top to bottom. $CFL = 0,4$ and $CFL = 0,2$. Velocity magnitude. ARoe Riemann solver. Time averaged pictures.	89
C.32.	From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Velocity magnitude. Time averaged pictures.	89

C.33. From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme. Velocity magnitude. Time averaged pictures.	90
C.34. From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Vorticity in z axis. Instantaneous pictures.	90
C.35. From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme. Vorticity in z axis. Instantaneous pictures.	91
C.36. From top to bottom. ARoe 1st order scheme, 3rd order scheme, HLLS 1st order scheme and 3rd order scheme. Vorticity in z axis. Time averaged pictures.	91
C.37. From top to bottom. ARoe $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme, HLLS $\Delta x = 0,026\ m$ and $\Delta x = 0,013\ m$ 1st order scheme. Vorticity in z axis. Time averaged pictures.	92
C.38. Picture showing initial conditions for unitary discharge.	93
C.39. Plots corresponding to Err_{mean} for u and v vs λ for different values of β . 1st order numerical scheme simulations.	96
C.40. Plots showing how $Err_{mean,u}$ and $Err_{mean,v}$ vary depending on n_b . 1st order numerical scheme simulations.	97
C.41. Comparison plots showing Err_j for cross sections at 8 x coordinates. Results correspond to three mesh refinements. $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. 1st order numerical scheme simulations.	97
C.42. Comparison plots showing Err_n for cross sections at 5 y coordinates. Results correspond to three mesh refinements. $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. 1st order numerical scheme simulations.	98
C.43. Left: 2d experimental velocity magnitude field out of the averaging process. Right: 2d numerical velocity magnitude field. 1st order numerical scheme simulation with $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Both pictures share the same presented colour scale.	98
C.44. Left: Experimental water depth. Right: Numerical water depth. 1st order numerical scheme simulation with $\lambda = 0,25$ and $\beta = 8$. Both pictures share the same presented colour scale.	99
D.1. Features found in a T-branching channel flow.	103
D.2. Dimensional details of the experiment.	104
D.3. Example of a V-notch weir.	104
D.4. Left: Defined integral of $u(z)$. Center: Example of a discrete velocity profile with 4 velocities for 4 different heights. Right: Calculated integral using the trapezoid rule.	106
D.5. Left: 3rd hypothesis. Right: 1st and 2nd hypothesis.	108
D.6. Example of a streamline with a decreasing in water depth h	111
D.7. Velocity profiles of horizontal depth-averaged velocity along cross section at $x = -1,037\ m$. It shows a decreasing in velocity, and a change in the sign of velocity, as Q_r raises and more flow rate is required downstream in the branch channel.	112
D.8. Velocity profiles of vertical depth-averaged velocity along cross section at $y = -0,4453\ m$. It shows an increasing in velocity, and a change in the sign of velocity, as Q_r raises and more flow rate is required downstream in the branch channel.	112
D.9. Recirculation width at cross section corresponding to $y = -0,4453\ m$ out of depth-averaged velocity values as Q_r raises. Linear regression and coefficient of determination R^2 are included in the title.	112

E.1. Drawn grid on the 2-dimensional representation of the velocity average magnitude corresponding to $Q_r = 0,409$. It can serve as a reference to see the area where a given velocity profile from appendices below is located.	113
E.2. Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,149$	114
E.3. Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Center: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Corresponding to $Q_r = 0,149$	114
E.4. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.	115
E.5. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.	116
E.6. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.	117
E.7. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,149$. Coordinates in meters.	118
E.8. Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,308$	119
E.9. Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Center: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Corresponding to $Q_r = 0,308$	119
E.10. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.	120
E.11. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.	121
E.12. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.	122
E.13. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,308$. Coordinates in meters.	123
E.14. Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,409$	124
E.15. Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,409$	124
E.16. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	125
E.17. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	126
E.18. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	127
E.19. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	128
E.20. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	129
E.21. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	130
E.22. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,409$. Coordinates in meters.	131
E.23. Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,672$	132
E.24. Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,672$	132
E.25. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.	133
E.26. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.	134
E.27. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.	135
E.28. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,672$. Coordinates in meters.	136
E.29. Left: Experimental velocity field. Right: Experimental water depth. Corresponding to $Q_r = 0,838$	137

E.30. Upper left: Standard deviation $\sigma_{\bar{u}}$. Upper right: Standard deviation $\sigma_{\bar{v}}$. Lower left: Depth-averaged horizontal velocity magnitude. Lower right: Depth-averaged vertical velocity, \bar{w} . Corresponding to $Q_r = 0,838$	137
E.31. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.	138
E.32. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.	139
E.33. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.	140
E.34. Velocity profiles corresponding to $Q_r = 0,838$. Coordinates in meters.	141

Lista de Tablas

5.1. Resultados de los errores de la discretización de las derivadas calculados en Matlab mediante la expresión (C.2).	21
5.2. Errores y ordenes de convergencia obtenidos para el caso de convección-difusión. Esquema numérico de orden 3.	24
5.3. Errores y ordenes de convergencia obtenidos para el caso de difusión. Esquema numérico de orden 2.	24
C.1. Error results of the derivatives discretization calculated in Matlab through expression (C.2).	60
C.2. Numerical results for different turbulence configurations showing the obtained reattachment length. Cases with a capital x correspond to cases 1 ($\nu_e = 0 \frac{m^2}{s}$) and 3 ($\nu_e = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$) which show unsteady flow and recirculation areas at the upper part of the channel. Experimental reattachment length equals to 4.6.	73
C.3. Numerical results concerning reattachment length and mean error out of the convergence analysis with mesh refinement.	74
C.4. Numerical results concerning reattachment length and mean error out of the convergence analysis with mesh refinement.	74
C.5. Numerical results of $Err_{overall}$ in percentage for different mesh refinements. 1st order numerical scheme provided results.	95
D.1. Experimental flow conditions. Q_b is the discharge of the branch channel flow, Q_u is the discharge of the upstream main channel. Q_r denotes the ratio of Q_b to Q_u	105
D.2. Calculated values of 2-dimensionality.	107
D.3. Selected data for the comparison test by using the hypotheses explained in Subsection D.3.1. The colored cells stand for the data obtained through the hypotheses. Left: $(x, y) = (0,5917, 0,13)$. h at $(0,58987, 0,13) = 0,14945 m$. Right: $(x, y) = (0,5917, 0,05978)$, h at $(0,58987, 0,05978) = 0,1464 m$. Coordinates are in meters.	110
D.4. Results of the comparison test corresponding to $(x, y) = (0,5917, 0,13)$. Coordinates are in meters. Velocities, standard deviations and changes are in $\frac{m}{s}$	110
D.5. Results of the comparison test corresponding to $(x, y) = (0,5917, 0,05978)$. Coordinates are in meters. Velocities, standard deviations and changes are in $\frac{m}{s}$	110

